



2ème année

Optique

Rémi CARMINATI

Claude BOCCARA

2014 - 2015

Table des matières

I	Lumière et Images	13
1	Interférences et cohérence	15
1.1	Description de la lumière naturelle	15
1.1.1	Modèle du train d'onde	15
1.1.2	Source macroscopique	16
1.2	Interférences à deux ondes	17
1.3	Cohérence temporelle	18
1.3.1	Mise en évidence : interféromètre de Michelson	18
1.3.2	Approche statistique	20
1.3.3	Spectroscopie à transformée de Fourier	21
1.4	Cohérence spatiale	22
1.4.1	Mise en évidence : fentes d'Young	22
1.4.2	Approche statistique	24
1.4.3	Théorème de Zernike - van Cittert	25
2	Interférences à ondes multiples	29
2.1	Préliminaire : lame à faces parallèles	29
2.2	Interféromètre de Fabry-Pérot	30
2.2.1	Intensité transmise	30
2.2.2	Discussion	32
2.3	Spectroscopie avec un Fabry-Pérot	33
3	Optique géométrique	35
4	Photométrie	51

4.1	Grandeurs photométriques	51
4.1.1	Luminance	51
4.1.2	Intensité d'une source	52
4.1.3	Cas particulier : source Lambertienne	53
4.1.4	Eclairement	53
4.2	Conservation de la luminance	54
4.2.1	Relation générale	54
4.2.2	Discussion	55
4.3	Unités photométriques	56
4.4	Rayonnement de corps noir	56
4.4.1	Définition et réalisation	56
4.4.2	Propriétés du rayonnement de corps noir	57
5	Détecteurs, signaux et bruits	61
5.1	Signaux photoélectriques	61
5.1.1	Signal issu d'un photodétecteur	61
5.1.2	Modélisation électrique du photodétecteur	62
5.2	Caractérisation du bruit	63
5.2.1	Signal et bruit. Définition statistique	63
5.2.2	Caractérisation spectrale	64
5.2.3	Filtrage du bruit	65
5.3	Le bruit : origine physique et modélisation	65
5.3.1	Origine microscopique	65
5.3.2	Bruit de photons	66
5.3.3	Densité spectrale du bruit de photons	67
5.3.4	Bruit thermique	67
5.3.5	Bruits technologiques	68
5.3.6	Addition des bruits	68
5.3.7	Grandeurs utilisées en pratique	69
5.4	Les grandes classes de photodétecteurs	69
5.4.1	Détecteurs thermiques	69
5.4.2	Détecteurs quantiques	71

6	Propagation et diffraction	75
6.1	Développement en ondes planes	75
6.1.1	Etablissement du développement en ondes planes (cas 2D)	75
6.1.2	Généralisation au cas 3D	78
6.1.3	Relations d'incertitude et diffraction	78
6.1.4	Ondes évanescentes, champ proche et limite de résolution	79
6.1.5	Exemple d'application : diffraction à distance finie par une fente	80
6.2	Principe de Huygens-Fresnel	81
6.3	Diffraction en champ lointain	83
6.3.1	Formulation à partir du principe d'Huygens-Fresnel	83
6.3.2	Formulation par le développement en ondes planes	84
6.3.3	Propriétés des figures de diffraction en champ lointain	84
7	Diffraction - Exemples	87
7.1	Diffraction par une fente	87
7.1.1	Calcul exact (développement en ondes planes)	87
7.1.2	Expression en champ lointain	88
7.2	Diffraction par une ouverture circulaire	88
7.2.1	Tache d'Airy	88
7.2.2	Limite de résolution d'un microscope	90
7.3	Diffraction par un réseau	91
7.3.1	Réseau de traits infiniment minces	91
7.3.2	Réseau avec traits de largeur finie	92
7.3.3	Réseau de taille finie	93
7.3.4	Spectroscopie par réseau	93
8	Optique de Fourier et relation objet-image	95
8.1	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert en amplitude	95
8.2	Eclairage cohérent et incohérent	97
8.2.1	Eclairage cohérent	97
8.2.2	Eclairage incohérent	97
8.3	Formation et traitement des images en éclairage cohérent	97
8.3.1	Transformation de Fourier par une lentille	97

8.3.2	Montage “4f”	98
8.3.3	Filtrage dans le plan de Fourier. Traitement optique des images	99
8.4	Formation des images en éclairage incohérent	100
8.5	Systèmes limités par la diffraction	102
8.5.1	Origine physique de la limite de résolution	102
8.5.2	Fonction de transfert en amplitude (éclairage cohérent)	104
8.5.3	Fonction de transfert en éclairage incohérent	105
9	Holographie	107
9.1	Introduction	107
9.2	Principe de l’holographie	107
9.2.1	Enregistrement	108
9.2.2	Restitution	108
9.3	Hologramme d’un point source	109
9.3.1	Calcul de l’hologramme	109
9.3.2	Analogie avec la diffraction par un réseau	111
9.4	Réalisation d’un hologramme	112
9.5	Quelques applications de l’holographie	114
9.5.1	Interférométrie holographique	114
9.5.2	Hologramme de Fourier	114
9.5.3	Reconnaissance de forme	115
9.5.4	Génération de l’onde conjuguée. Correction d’aberrations	116
II	Lumière et Matière	117
10	Ondes électromagnétiques dans le vide	119
10.1	Equations de Maxwell dans le vide	119
10.2	Ondes électromagnétiques dans le vide	120
10.2.1	Equation d’onde	120
10.2.2	Ondes planes	120
10.2.3	Flux d’énergie. Vecteur de Poynting	121
10.3	Polarisation des ondes monochromatiques	122

11 Optique des milieux continus linéaires et isotropes	125
11.1 Equations de Maxwell : du microscopique au macroscopique	125
11.1.1 Champs microscopiques	125
11.1.2 Définition d'une moyenne spatiale	126
11.1.3 Passage aux équations de Maxwell moyennées	127
11.1.4 Autre écriture des équations de Maxwell macroscopiques	129
11.2 Relations constitutives. Constantes optiques	129
11.2.1 Rappel : relations constitutives en régime statique	129
11.2.2 Régime dynamique. Dispersion	130
11.2.3 Constante diélectrique généralisée	131
11.2.4 Relations de Kramers-Kronig	132
11.3 Propagation optique dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes	133
11.3.1 Equation de Helmholtz	133
11.3.2 Indice complexe. Propagation et atténuation	133
11.4 Bilan d'énergie. Puissance absorbée	134
11.4.1 Puissance absorbée	134
11.4.2 Théorème de Poynting	135
11.4.3 Bilan d'énergie en régime monochromatique	136
12 Ondes aux interfaces : réflexion et transmission	139
12.1 Lois de Snell-Descartes	139
12.1.1 Principe général	139
12.1.2 Lois de la réflexion	140
12.1.3 Lois de la transmission	140
12.2 Facteurs de Fresnel en amplitude	141
12.2.1 Relations de continuité des champs	141
12.2.2 Calcul des facteurs de Fresnel en polarisation TE	142
12.2.3 Cas de la polarisation TM	143
12.3 Conservation de l'énergie à une interface	144
12.3.1 Facteurs de Fresnel en énergie	144
12.3.2 Relation de conservation de l'énergie	145
12.4 Conservation de l'énergie dans le cas d'une couche plane	145

12.5	Discussion. Cas particuliers	146
12.5.1	Ordres de grandeur (incidence normale)	146
12.5.2	Réflexion totale interne	146
12.5.3	Dépendance angulaire des facteurs de réflexion	147
12.5.4	Absorption par un corps opaque	147
13	Propriétés optiques de la matière condensée	149
13.1	Mécanismes d'absorption dans l'eau liquide. Indice de réfraction	149
13.2	Cristaux polaires	151
13.3	Métaux	152
13.3.1	Contribution des électrons libres	152
13.3.2	Transitions inter-bandes	153
13.4	Semiconducteurs	154
14	Optique des cristaux anisotropes	157
14.1	Tenseur diélectrique	157
14.1.1	Définition d'un milieu anisotrope	157
14.1.2	Définition du tenseur diélectrique	158
14.1.3	Propriétés du tenseur diélectrique	158
14.1.4	Classification des milieux	159
14.2	Ondes planes monochromatiques dans les milieux anisotropes	160
14.2.1	Relations entre \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{H}	160
14.2.2	Vitesse de phase et vitesse de l'énergie	161
14.2.3	Equation de Fresnel (équation aux indices)	161
14.3	Constructions géométriques	163
14.3.1	Ellipsoïde des indices	163
14.3.2	Surface des indices	164
14.3.3	Surface d'onde (ou surface des vitesses)	165
14.4	Cas de milieux uniaxes	166
14.4.1	Ellipsoïde des indices. Onde ordinaire et extraordinaire	166
14.4.2	Surface des indices et surface d'onde	167
15	Anisotropie : applications	169

15.1 Réfraction et biréfringence	169
15.1.1 Construction de Descartes	169
15.1.2 Construction de Huygens	170
15.1.3 Double réfraction à travers une lame à faces parallèles	171
15.1.4 Application de la double réfraction : polariseurs	171
15.2 Lames minces et interférences en lumière polarisée	174
15.2.1 Lame mince biréfringente	174
15.2.2 Action sur une polarisation linéaire	175
15.2.3 Interférences à deux ondes en lumière polarisée	176
15.2.4 Mesure des déphasages : compensateurs	178
15.3 Dichroïsmes et pouvoir rotatoire	179
15.3.1 Biréfringence circulaire	179
15.4 Anisotropies induites et modulations de la lumière	180
15.4.1 Effets magnéto-optiques	181
15.4.2 Effet Kerr électro-optique	182
15.4.3 Effet Pockels (ou électro-optique linéaire)	184
15.4.4 Biréfringence par déformation	184
16 Introduction à l'optique non linéaire	187
16.1 Origine des effets non linéaires	187
16.2 Susceptibilité linéaire et non linéaire	188
16.2.1 Définition	188
16.2.2 Susceptibilité linéaire : modèle de l'électron élastiquement lié	188
16.2.3 Potentiel anharmonique. Susceptibilité non linéaire d'ordre 2	189
16.3 Génération de second harmonique	191
16.3.1 Condition d'accord de phase	191
16.3.2 Réalisation pratique	193
16.3.3 Notation contractée	194
16.4 Autres applications de la réponse non linéaire d'ordre 2	195
16.4.1 Addition de fréquences	195
16.4.2 Soustraction de fréquences	195
16.4.3 Amplification paramétrique et oscillateur paramétrique optique	196

17 Coefficients d'Einstein, excitation, relaxation	199
17.1 Approche phénoménologique	199
17.2 Equations de bilan	201
17.2.1 Forme générale	201
17.2.2 Régime stationnaire	201
17.2.3 Equilibre thermodynamique. Relations entre les coefficients	201
17.3 Une autre écriture des équations de bilan	202
17.4 Excitation optique d'atomes à deux niveaux	203
17.4.1 Régime stationnaire	203
17.4.2 Régime dynamique : excitation et relaxation	204
17.4.3 Ordres de grandeur	205
17.5 Mécanismes d'excitation et de relaxation non radiatifs	205
17.5.1 Excitation non optique	205
17.5.2 Relaxations non radiatives	206
17.6 Largeur des raies spectrales	207
17.6.1 Largeur naturelle	207
17.6.2 Elargissements homogènes	208
17.6.3 Elargissements inhomogènes	208
18 Interaction rayonnement-matière. Traitement quantique	211
18.1 Forme du hamiltonien d'interaction	211
18.1.1 Opérateur moment dipolaire	211
18.1.2 Moment dipolaire de transition	212
18.1.3 Hamiltonien dipolaire électrique	212
18.2 Calcul des coefficients d'Einstein	213
18.3 Indice optique d'un gaz d'atomes	215
18.3.1 Vecteur d'état	215
18.3.2 Moment dipolaire moyen	216
18.3.3 Polarisabilité atomique	216
18.3.4 Constante diélectrique d'un gaz d'atomes	217
19 Lasers	219
19.1 Milieu amplificateur	219

19.1.1	Gain. Inversion de population	219
19.1.2	Gain d'un système à trois niveaux	220
19.1.3	De trois à quatre niveaux	221
19.2	Cavité. Condition d'oscillation	222
19.2.1	Modes longitudinaux d'une cavité Fabry-Pérot	222
19.2.2	Condition d'oscillation	223
19.3	Modes de fonctionnement	224
19.3.1	Pompage	224
19.3.2	Un peu d'histoire : le laser à rubis	225
19.3.3	Fonctionnement en régime relaxé	226
19.3.4	Régime déclenché (<i>Q-switched</i>)	227
19.3.5	Régime à modes synchronisés (ou modes bloqués en phase)	228
19.3.6	Fonctionnement monomode	229
19.4	Modes transverses d'une cavité	230
19.5	Exemples de lasers	232
19.6	Applications : pourquoi le laser ?	234
A	Fonction de corrélation du champ à deux fréquences	235
B	Démonstration de l'équation des rayons lumineux	237
C	Démonstration de la loi de Planck	239
D	Démonstration de la statistique du bruit de grenaille en photodétection (bruit de photons)	241
E	Etablissement de l'équation de Maxwell-Gauss macroscopique	245
F	Méthode des perturbations en mécanique quantique	247
F.1	Position du problème	247
F.2	Expression générale	247
F.3	Perturbation sinusoïdale	249
F.4	Couplage avec un continuum. Règle d'or de Fermi	250
F.5	Validité de l'approximation de l'onde tournante	251

G	Traitement non perturbatif de l'interaction atome-lumière. Equations de Bloch optiques	253
G.1	Matrice densité. Système dans un état pur	253
G.1.1	Valeur moyenne d'une observable	253
G.1.2	Définition de $\rho(t)$	254
G.1.3	Equation d'évolution	254
G.2	Matrice densité. Mélange statistique d'états	255
G.3	Matrice densité d'un système à deux niveaux	255
G.4	Equations de Bloch optiques	256
G.4.1	Relaxation spontanée	256
G.4.2	Couplage avec un champ extérieur (laser)	257
G.4.3	Approximation de l'onde tournante. Equations de Bloch optiques	258
G.5	Traitement non perturbatif : oscillations de Rabi, saturation	259
G.5.1	Oscillations de Rabi	259
G.5.2	Comportement aux temps courts	260
G.5.3	Solution stationnaire. Saturation	260
G.6	Indice d'un gaz d'atomes (traitement non perturbatif)	261
G.6.1	Polarisabilité atomique	261
G.6.2	Susceptibilité d'un gaz d'atomes	262
G.6.3	Susceptibilité linéaire	262
G.6.4	Modèle classique de l'électron élastiquement lié	263
G.6.5	Force d'oscillateur	264

Partie I

Lumière et Images

Chapitre 1

Interférences et cohérence

Objectifs

- Introduire la notion de cohérence et son lien avec les interférences à deux ondes.
- Définir la cohérence temporelle et la cohérence spatiale, les longueurs de cohérence associées et le lien avec les propriétés de la source (spectre et taille).
- Donner le principe de la spectroscopie à transformée de Fourier.

Remarque: les sections intitulées “Approche statistique” sont à considérer comme des compléments dont on n’exige pas la maîtrise au niveau de ce cours.

1.1 Description de la lumière naturelle

La lumière produite par une source classique (par opposition à celle d’un laser) provient de l’émission spontanée par un grand nombre d’atomes¹. Dans de nombreuses situations pratiques on ne peut pas se contenter de modéliser cette lumière par une simple onde monochromatique parfaitement déterminée dans l’espace et le temps. Le caractère fondamentalement statistique de l’émission spontanée et le grand nombre d’atomes mis en jeu dans la source imposent une description plus fine. Nous verrons en particulier que l’aptitude de la lumière à produire des interférences est caractérisée par son état de cohérence, notion que nous allons définir.

1.1.1 Modèle du train d’onde

Dans une approche classique, on peut considérer qu’un atome individuel se comporte comme un oscillateur harmonique amorti, de fréquence de résonance ω_0 et de durée de vie τ (l’amortissement est dû aux pertes par rayonnement, mais également par collisions ou tout type de couplage avec

¹On utilise la dénomination “atomes” même lorsque les émetteurs sont des molécules, des paires électrons-trous ou d’autres systèmes quantiques ayant une transition radiative.

l'environnement). Le champ électrique émis et mesuré en un point \mathbf{r} est de la forme :

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \exp[-t/(2\tau)] \quad \text{pour } t > 0. \quad (1.1)$$

La phase ϕ a une valeur qu'il n'est pas possible de prédire (émission spontanée), et qui a un caractère aléatoire d'un cycle d'émission à l'autre. L'atome émet donc une suite d'impulsions de durée typique τ (de longueur typique $c\tau$ où c est la vitesse de la lumière). On parle de "train d'onde". Nous verrons dans la partie du cours "Lumière et Matière" comment ce modèle se justifie d'un point de vue quantique, ω_0 s'identifiant avec la fréquence de transition (fréquence de Bohr) et τ avec la durée de vie de l'état excité.

Ordres de grandeur en optique (domaine visible) : $\omega_0 \simeq 10^{14} - 10^{15}$ Hz, $\tau \simeq 10^{-8} - 10^{-9}$ s.

Un champ amorti dans le temps de la forme (1.1) n'est pas monochromatique. Son spectre se calcule par transformation de Fourier :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, \omega) &= E_0 \int_0^\infty \cos(\omega_0 t) \exp[-t/(2\tau)] \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{E_0}{2} \frac{1}{-i(\omega + \omega_0) + 1/(2\tau)} + \frac{E_0}{2} \frac{1}{-i(\omega - \omega_0) + 1/(2\tau)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Puisque $1/\tau \ll \omega_0$, le spectre reste étroit autour de ω_0 , de telle sorte que le premier terme est négligeable. L'intensité du spectre est donc donnée par le module au carré du second terme :

$$|E(\mathbf{r}, \omega)|^2 = \frac{E_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (1.3)$$

Il s'agit d'un profil dit Lorentzien, centré en ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\gamma = 1/\tau$. Un champ à spectre étroit autour d'une fréquence donnée (la condition est ici $\gamma \ll \omega_0$) est dit quasi-monochromatique.

1.1.2 Source macroscopique

Dans le cas d'une source macroscopique (constituée d'un grand nombre d'atomes), le champ émis résulte de la superposition d'un grand nombre de trains d'onde ayant des phases aléatoires. Si l'on observe le champ en un point \mathbf{r} , son amplitude et sa phase fluctuent dans le temps de manière aléatoire, avec un temps caractéristique de l'ordre de τ (typiquement 10^{-9} s). On peut l'écrire sous la forme

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ a(\mathbf{r}, t) \exp[i\Phi(\mathbf{r}, t)] \exp(-i\omega_0 t) \} \quad (1.4)$$

où $a(\mathbf{r}, t)$ et $\Phi(\mathbf{r}, t)$ fluctuent aléatoirement dans le temps.

Aux fréquences optiques, un détecteur mesure l'énergie moyennée sur un intervalle de temps $T \gg 2\pi/\omega_0$ (aucun détecteur ne répond sur un temps de l'ordre de 10^{-15} s). Si l'on avait $T < \tau$ (ce qui est rarement le cas en optique), on pourrait suivre les fluctuations aléatoires du champ dans le temps. Cette situation est réaliste par exemple en acoustique ou en électromagnétisme aux fréquences GHz. Si $T \gg \tau$ (cas usuel en optique), alors les fluctuations aléatoires du champ dans le temps se manifestent dans l'aptitude à observer des interférences lorsqu'on superpose

deux copies d'un champ du type (1.4), décalées dans le temps ou prises en deux points différents. Cette aptitude à produire des interférences observables est caractérisée par l'état de cohérence du champ que nous allons définir dans la suite du chapitre. La notion de cohérence est donc intimement liée à celle d'interférences.

Remarque : avec un laser, l'émission stimulée crée une relation de phase stable entre les différents trains d'onde. Cependant, il reste d'autres sources de fluctuations : vibrations mécaniques, thermiques, émission spontanée résiduelle, etc. Le modèle ci-dessus s'applique, mais le temps caractéristique des fluctuations est en général plus grand que celui induit par l'émission spontanée.

1.2 Interférences à deux ondes

Considérons deux champs quasi-monochromatiques de même fréquence centrale, que nous écrirons en notations complexes :

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{r}, t) &= a_1(\mathbf{r}, t) \exp[i\Phi_1(\mathbf{r}, t)] \exp(-i\omega_0 t) \\ E_2(\mathbf{r}, t) &= a_2(\mathbf{r}, t) \exp[i\Phi_2(\mathbf{r}, t)] \exp(-i\omega_0 t) \end{aligned}$$

On superpose ces deux champs en un point \mathbf{r} et on mesure l'intensité résultante ². L'intensité est la valeur moyenne temporelle de l'énergie sur un $T \gg 2\pi/\omega_0$, qui en notation complexe s'identifie (à un facteur près) avec le module au carré du champ :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= |E_1(\mathbf{r}, t) + E_2(\mathbf{r}, t)|^2 \\ &= |E_1(\mathbf{r}, t)|^2 + |E_2(\mathbf{r}, t)|^2 + 2 \operatorname{Re}[E_1^*(\mathbf{r}, t)E_2(\mathbf{r}, t)] \\ &= I_1(\mathbf{r}, t) + I_2(\mathbf{r}, t) + 2 a_1(\mathbf{r}, t)a_2(\mathbf{r}, t) \cos \Phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où * désigne le complexe conjugué. On a noté $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_2(\mathbf{r}, t) - \Phi_1(\mathbf{r}, t)$ la différence de phase entre les deux champs. L'équation (1.5) montre que l'on peut avoir $I(\mathbf{r}, t) \neq I_1(\mathbf{r}, t) + I_2(\mathbf{r}, t)$, ce qui est la caractéristique d'un phénomène d'interférence. Le terme $2 a_1(\mathbf{r}, t)a_2(\mathbf{r}, t) \cos \Phi(\mathbf{r}, t)$ est appelé "terme d'interférence".

Si le temps d'intégration T du détecteur est grand devant le temps caractéristique des fluctuations de la différence de phase $\Phi(\mathbf{r}, t)$, alors $\langle \cos \Phi(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, $\langle \dots \rangle$ désignant la moyenne temporelle sur l'intervalle de temps T . On a brouillage des interférences et $I = I_1 + I_2$. Si au contraire $\Phi(\mathbf{r}, t)$ est stable sur l'intervalle de temps T , alors on observe les interférences (et $I \neq I_1 + I_2$). L'aptitude de deux ondes se superposant à produire des interférences observables est ce que caractérise la notion de cohérence que nous allons maintenant préciser.

²Dans de nombreuses situations en interférométrie, ces deux champs sont issus d'une même source et c'est l'interféromètre qui réalise deux copies du champ et les superpose après leur avoir fait suivre deux chemins différents.

1.3 Cohérence temporelle

1.3.1 Mise en évidence : interféromètre de Michelson

Le schéma de l'interféromètre de Michelson est présenté sur la Fig. 1.1. L'onde incidente est dédoublée par une lame séparatrice, les deux ondes étant recomposées sur le détecteur après avoir parcouru chacune un bras de l'interféromètre. L'un des bras comporte un miroir mobile, qui permet d'induire une différence de marche $\delta = 2x$.

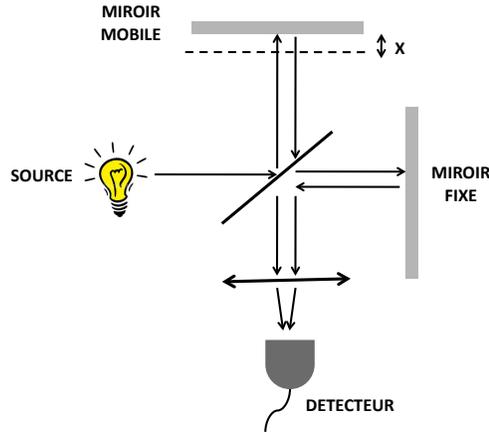


Figure 1.1: Schéma de principe de l'interféromètre de Michelson. On note x le déplacement du miroir mobile par rapport à la position de différence de marche nulle.

Considérons tout d'abord le cas d'une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega = c/\nu$. La différence de phase entre les deux ondes est

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi x}{\lambda}$$

L'intensité reçue par le détecteur s'écrit (en notant I_0 l'intensité due à l'un des deux bras) :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\omega x}{c} \right) \right]$$

Toute source réelle a un spectre étendu. Dans ce cas, l'interférogramme (enregistrement de $I(x)$) s'obtient en superposant les interférogrammes correspondant aux différentes fréquences du spectre³. On caractérise une lumière polychromatique par sa densité spectrale de puissance $\phi(\omega)$, qui est telle que $\phi(\omega)d\omega$ soit la puissance (intensité) dans la bande spectrale $[\omega, \omega + d\omega]$. Si la source a une largeur spectrale $\Delta\omega$ autour d'une fréquence centrale ω_0 , l'interférogramme en lumière polychromatique est donc :

$$I(x) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} 2\phi_0(\omega) \left[1 + \cos \left(\frac{2\omega x}{c} \right) \right] d\omega \quad (1.6)$$

³Pour une source stationnaire (par exemple une lampe blanche continue) deux fréquences différentes n'interfèrent pas, et les intensités produites par les différentes fréquences s'ajoutent. Ce résultat est démontré dans l'Annexe A.

où l'on a noté $\phi_0(\omega)$ la densité spectrale de puissance dans un bras de l'interféromètre. Pour une source quasi-monochromatique, on peut considérer que ϕ_0 est constante et effectuer l'intégrale. On obtient ⁴ :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\omega_0 x}{c} \right) \text{sinc} \left(\frac{\Delta\omega x}{c} \right) \right] \quad (1.7)$$

où $I_0 = \phi_0 \Delta\omega$ est l'intensité totale dans un bras de l'interféromètre. Par rapport au cas monochromatique, l'interférogramme est multiplié par le terme $\text{sinc}(\dots)$ que l'on appelle *visibilité*. La visibilité module l'interférogramme, jusqu'à annuler le contraste au-delà d'un déplacement du miroir que l'on notera x_{max} .

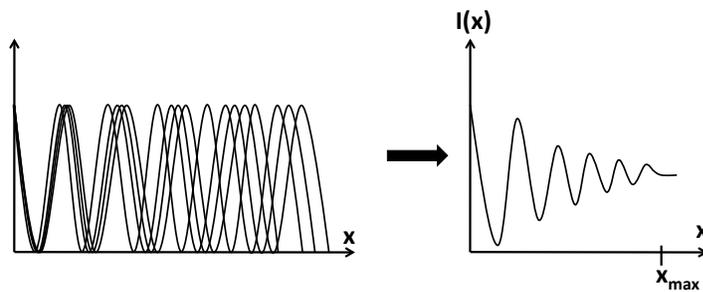


Figure 1.2: Atténuation de l'interférogramme en lumière polychromatique. Gauche : interférogrammes créés par différentes fréquences. Droite : interférogramme résultant. On observe l'annulation du contraste au-delà d'une certain déplacement x_{max} du miroir, comme décrit par l'expression (1.7).

Conventionnellement, on définit x_{max} par le premier zéro de la fonction sinc, qui s'obtient pour $\Delta\omega x_{max}/c = \pi$. La différence de marche (ou de chemin optique) maximum qui permet d'observer les interférences est donc $2x_{max} = 2\pi c/\Delta\omega$. Cette différence de marche maximum est ce que l'on appelle la *longueur de cohérence temporelle* de la lumière incidente, que nous noterons ℓ_{coh} , et qui est donc reliée à la largeur spectrale par :

$$\ell_{coh} = \frac{2\pi c}{\Delta\omega} = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (1.8)$$

On définit également le *temps de cohérence* par

$$\tau_{coh} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (1.9)$$

Dans l'image du train d'onde, on peut associer ℓ_{coh} à la longueur du train d'onde et τ_{coh} à sa durée. L'interféromètre de Michelson réalise deux copies identiques d'un train d'onde donné, les décale d'une distance $2x$ (ou d'un temps $2x/c$), et les superpose. Si le décalage est plus grand que la longueur du train d'onde, alors les interférences disparaissent. Le lien avec la largeur spectrale ne fait que traduire la relation de transformée de Fourier dont nous avons déjà parlé au début de ce chapitre.

On retiendra que la *cohérence temporelle* d'une source (ou du champ émis par cette source) est directement liée à sa *largeur spectrale* $\Delta\nu$. En particulier, une source monochromatique a une cohérence temporelle parfaite.

⁴On utilise $\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$.

1.3.2 Approche statistique

Dans une approche plus rigoureuse de la cohérence, on utilise une approche statistique et on relie la notion de cohérence à une corrélation. On considère que l'amplitude complexe (le terme dans la partie réelle) d'un champ de la forme (1.4), observé en un point \mathbf{r} donné, est une variable aléatoire qui dépend du temps t . On notera simplement $E(t)$ cette amplitude complexe pour alléger les notations. L'intensité mesurée en sortie de l'interféromètre de Michelson s'écrit :

$$I(x) = \langle |E(t) + E(t + \tau)|^2 \rangle \quad (1.10)$$

avec $\tau = 2x/c$. La notation $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne statistique, qui en pratique s'identifie avec la valeur moyenne temporelle effectuée par le processus même de détection. Cette expression traduit bien le fait que l'interféromètre superpose deux copies identiques du champ mais décalées dans le temps du fait du déplacement du miroir, et mesure l'intensité résultante. Le développement du membre de droite conduit à :

$$I(x) = \langle |E(t)|^2 \rangle + \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle \quad (1.11)$$

Si le champ incident est statistiquement stationnaire (ses propriétés statistiques ne dépendent pas de t , ce qui est le cas de la lumière produite par les sources naturelles), on a $\langle |E(t)|^2 \rangle = \langle |E(t + \tau)|^2 \rangle = I_0$. On peut donc réécrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$I(x) = 2 I_0 \left[1 + \operatorname{Re} \frac{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle}{I_0} \right] = 2 I_0 [1 + \operatorname{Re} C(\tau)] \quad (1.12)$$

On a introduit la fonction d'autocorrélation (normalisée) du champ ⁵

$$C(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle}{I_0} \quad (1.13)$$

L'expression ci-dessus montre que le terme d'interférence est directement donné par la fonction d'autocorrélation du champ (plus précisément sa partie réelle). La notion de cohérence temporelle est donc liée à la ressemblance du champ avec lui même décalé dans le temps, ressemblance que l'on mesure statistiquement par une corrélation.

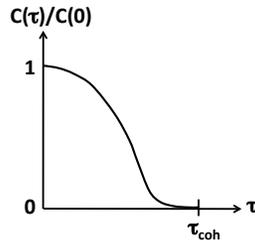


Figure 1.3: Allure de la fonction d'autocorrélation normalisée du champ. Elle devient négligeable au-delà d'une valeur τ_{coh} .

$C(\tau)$ a l'allure typique d'une fonction de corrélation (figure 1.3). Elle devient négligeable au-delà d'une valeur τ_{coh} , qui permet de définir statistiquement le temps de cohérence (ainsi que le longueur de cohérence temporelle $\ell_{coh} = c \tau_{coh}$).

⁵Du fait de la stationnarité du champ, cette fonction de corrélation ne dépend que de la variable τ .

Lien avec la largeur spectrale

L'approche statistique permet également de retrouver rigoureusement le lien entre le temps de cohérence et la largeur spectrale $\Delta\omega$. Pour cela, il faut introduire la densité spectrale de puissance $\phi(\omega)$, qui est la grandeur permettant de caractériser le spectre d'un signal statistiquement stationnaire. On la définit mathématiquement comme

$$\phi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|E_T(\omega)|^2}{T} \quad (1.14)$$

où $E_T(\omega)$ est la transformée de Fourier d'une portion de durée T du champ notée $E_T(t)$, telle que $E_T(t) = E(t)$ pour $t \in [-T/2, T/2]$ et $E_T(t) = 0$ sinon :

$$E_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_T(t) \exp(i\omega t) dt \quad (1.15)$$

Cette définition un peu compliquée est nécessaire car le champ étant statistiquement stationnaire, son module au carré ne décroît pas à l'infini de telle sorte que sa transformée de Fourier ne peut pas se définir sans précaution. Physiquement, la densité spectrale de puissance $\phi(\omega)$ définie de cette manière s'interprète bien comme la puissance (intensité) dans la bande spectrale $[\omega, \omega + d\omega]$, telle que nous l'avons introduite précédemment. Un théorème fondamental de la théorie des signaux statistiques (que nous ne démontrons pas), qui porte le nom de théorème de Wiener-Khinchin, relie la densité spectrale de puissance à la fonction d'autocorrélation du champ par une simple relation de transformée de Fourier (par rapport à la variable τ) :

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (1.16)$$

De cette relation de transformée de Fourier, on déduit directement le lien entre la largeur spectrale (largeur de $\phi(\omega)$) et la largeur de la fonction d'autocorrélation (temps de cohérence τ_{coh}) sous la forme d'une "relation d'incertitude" :

$$\Delta\omega \times \tau_{coh} \simeq 2\pi \quad \text{ou encore} \quad \Delta\nu \times \tau_{coh} \simeq 1 \quad (1.17)$$

Ceci permet donc de démontrer la relation (1.9) dans le cadre de la théorie statistique de la cohérence. Ce lien de transformée de Fourier entre la fonction d'autocorrélation (terme d'interférence de l'interféromètre de Michelson) et la densité spectrale de puissance suggère aussi une approche élégante de spectroscopie que nous allons décrire ci-dessous.

1.3.3 Spectroscopie à transformée de Fourier

Principe : si l'on enregistre l'interférogramme $I(x)$ en déplaçant le miroir mobile, alors sa partie dynamique donne accès à $\langle E(t)E^*(t+\tau) \rangle$ avec $\tau = 2x/c$. Par transformée de Fourier, on obtient $\phi(\omega)$ qui est le spectre du rayonnement incident.

Ecriture pratique : dans ce cours on utilise en général la pulsation ω (que l'on appelle d'ailleurs souvent fréquence par abus de langage) comme variable spectrale. En spectroscopie, l'habitude veut qu'on utilise souvent le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ (unité cm^{-1}). Mais on pourrait aussi bien

utiliser la longueur d'onde dans le vide λ , la pulsation ω , ou la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. Tout cela n'est que convention et il faut savoir s'adapter et passer d'une variable à l'autre.

La partie dynamique de l'interférogramme de Michelson peut se réécrire sous la forme (expression qui peut se déduire directement de l'Eq. 1.6 sans passer par l'approche statistique) :

$$I(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\sigma) \cos(2\pi \delta \sigma) d\sigma \quad (1.18)$$

où $\delta = 2x$ est la différence de marche. Introduisons la partie paire $\phi_p(\sigma)$ et la partie impaire $\phi_i(\sigma)$ du spectre, définies par

$$\begin{aligned} \phi_p(\sigma) &= \frac{1}{2} [\phi(\sigma) + \phi(-\sigma)] \\ \phi_i(\sigma) &= \frac{1}{2} [\phi(\sigma) - \phi(-\sigma)] \end{aligned}$$

On a par construction $\phi(\sigma) = \phi_p(\sigma) + \phi_i(\sigma)$. L'Eq. (1.18) se réécrit alors sous la forme

$$I(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p(\sigma) \cos(2\pi \delta \sigma) d\sigma \quad (\text{la partie impaire ne contribue pas}) \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p(\sigma) [\exp(i2\pi \delta \sigma) + \exp(-i2\pi \delta \sigma)] d\sigma \quad (1.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p(\sigma) \exp(i2\pi \delta \sigma) d\sigma \quad (1.21)$$

Donc en enregistrant $I(\delta)$ et en calculant numériquement sa transformée de Fourier par rapport à la variable δ (déplacement du miroir), on a accès à la partie paire du spectre. En ne gardant que la partie correspondant à $\sigma > 0$ (qui est la seule à avoir un sens physique), on obtient $\phi(\sigma)$. La résolution spectrale et l'intervalle spectral utilisable (intervalle spectral libre) sont directement liés à l'amplitude de déplacement du bras (domaine de δ qu'il est possible d'explorer) et au pas d'échantillonnage de ce déplacement (conséquences de la relation de transformée de Fourier - voir Préceptorat sur la spectroscopie).

1.4 Cohérence spatiale

1.4.1 Mise en évidence : fentes d'Young

L'expérience des fentes d'Young est schématisé sur la figure 1.4. On observe l'intensité en un point M de l'écran placé en champ lointain (en pratique dans le plan focal image d'une lentille de distance focale f).

Raisonnons tout d'abord sur la lumière émise par un point S de la source. La différence de marche au point M entre les deux ondes issues de chacune des fentes s'écrit $\delta = \delta_1 + \delta_2$ avec $\delta_1 = SB - SA$ et $\delta_2 = BM - AM$. Sous les hypothèses $y \ll f$, $v \ll L$ et $a \ll L$ (les notations

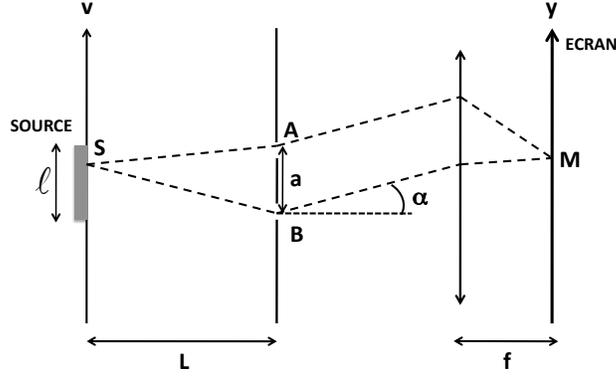


Figure 1.4: Schéma de principe de l'expérience des fentes d'Young. On note ℓ la taille de la source, a l'espacement entre les deux fentes (supposées infinies dans la direction normale au plan de la figure et infiniment minces), et L la distance de la source au plan des fentes. On mesure l'intensité dans le plan focal image d'une lentille de distance focale f .

sont définies sur la figure 1.4), on a :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= [L^2 + (-a/2 - v)^2]^{1/2} - [L^2 + (a/2 - v)^2]^{1/2} \\ &= L (1 + a^2/4L^2 + v^2/L^2 + av/L^2)^{1/2} - L (1 + a^2/4L^2 + v^2/L^2 - av/L^2)^{1/2} \\ &\simeq \frac{av}{L} \end{aligned}$$

et

$$\delta_2 = A \sin \alpha \simeq a \alpha \simeq a \frac{y}{f}$$

On a donc finalement

$$\delta = a \left(\frac{v}{L} + \frac{y}{f} \right) \quad (1.22)$$

Pour un point source donné, l'intensité au point M est donc

$$I(y) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a v}{\lambda L} + \frac{2\pi a y}{\lambda f} \right) \right] \quad (1.23)$$

où l'on a noté I_0 l'intensité due à une seule fente.

Examinons maintenant le cas d'une source étendue monochromatique et *spatialement incohérente* (ce qui signifie que deux points différents de la source émettent avec des phases aléatoires l'un par rapport à l'autre). L'intensité résultante au point M s'obtient en sommant les contributions de tous les points de la source :

$$I(y) = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} 2P_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a v}{\lambda L} + \frac{2\pi a y}{\lambda f} \right) \right] dv \quad (1.24)$$

On a introduit la puissance linéique P_0 émise par la source, telle que $P_0 \ell = I_0$ (intensité totale émise et passant par une fente). On obtient après intégration :

$$I(y) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda f} \right) \text{sinc} \left(\frac{2\pi a \ell}{\lambda 2L} \right) \right] \quad (1.25)$$

Il s'agit là aussi d'une figure d'interférences modulée par un terme de visibilité en $\text{sinc}(\dots)$. Si l'on augmente la distance entre les deux fentes, la visibilité s'annule pour une distance a_{max} telle que $(2\pi/\lambda)a_{max}\ell/2L = \pi$, ce qui donne $a_{max} = \lambda L/\ell$. Cette distance est ce que l'on définit comme la *longueur de cohérence spatiale* que nous noterons ℓ_{spa} , et qui s'écrit donc :

$$\ell_{spa} = \frac{\lambda L}{\ell} = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (1.26)$$

où $\Delta\theta$ est l'angle sous lequel est vue la source depuis le plan contenant les deux fentes. La longueur de cohérence spatiale (à ne pas confondre avec la longueur de cohérence temporelle) caractérise le champ dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Elle donne la distance maximum entre deux échantillons ponctuels du champ qui permet à ces deux échantillons de produire des interférences observables (et donc de produire des franges visibles dans l'expérience des fentes d'Young).

1.4.2 Approche statistique

On peut interpréter l'expérience des fentes d'Young comme la sélection de deux échantillons ponctuels du champ, que l'on superpose ensuite pour les faire interférer (voir figure 1.5).

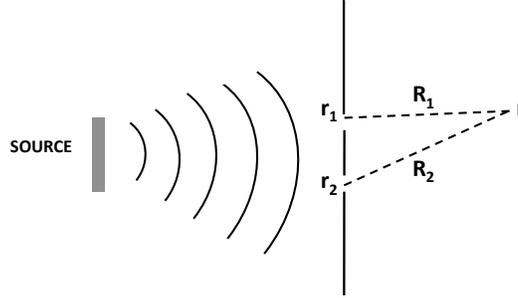


Figure 1.5: Notations utilisées dans la modélisation de l'expérience des fentes d'Young en optique statistique.

D'après le principe d'Huygens-Fresnel (que nous reverrons dans le chapitre 6), le champ au point d'observation \mathbf{r} est la superposition d'une onde dont l'amplitude est proportionnelle au champ en \mathbf{r}_1 (première fente) et d'une onde dont l'amplitude est proportionnelle au champ en \mathbf{r}_2 (deuxième fente). On a donc formellement :

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t - R_1/c) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t - R_2/c)$$

avec $R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$, $R_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|$ et K_1, K_2 des constantes qu'on ne précise pas mais que l'on peut écrire précisément dans le cadre du principe d'Huygens-Fresnel. L'intensité résultante est alors :

$$I(\mathbf{r}) = |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t - R_1/c)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t - R_2/c)|^2 \rangle + 2\text{Re} [K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t - R_1/c) E(\mathbf{r}_2, t - R_2/c) \rangle]$$

Pour une lumière statistiquement stationnaire, on a $|K_j|^2 \langle |E(\mathbf{r}_j, t - R_j/c)|^2 \rangle = |K_j|^2 \langle |E(\mathbf{r}_j, t)|^2 \rangle$ que l'on notera simplement I_j , intensité produite par la fente j ($j = 1, 2$). De plus, en introduisant le décalage en temps $\tau = (R_1 - R_2)/c$, on peut réécrire l'intensité sous la forme⁶ :

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2K_1K_2 \operatorname{Re}\langle E^*(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$$

On observe que le terme d'interférence est donné par la fonction de corrélation du champ en deux points différents, et à deux temps différents. Cette fonction de corrélation, qui est la grandeur fondamentale en théorie de la cohérence optique, est appelée *fonction de cohérence mutuelle*, et notée généralement $\Gamma_{12}(\tau)$:

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E^*(\mathbf{r}_1, t)E(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle \quad (1.27)$$

Afin d'avoir une mesure du degré de cohérence qui ne dépende pas de l'amplitude du champ, on normalise pour définir le *degré de cohérence*, noté $\gamma_{12}(\tau)$:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} \quad (1.28)$$

en remarquant que $\Gamma_{jj}(0) = I_j$ est simplement l'intensité produite par la fente j . Finalement, l'intensité mesurée en un point dans l'expérience des fentes (ou trous) d'Young s'écrit sous sa forme la plus générale :

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau) \quad (1.29)$$

Le terme d'interférence est donc directement piloté par le degré de cohérence. Cette grandeur caractérise à la fois la cohérence temporelle (un terme $\gamma_{jj}(\tau)$ mesurerait la cohérence temporelle uniquement) et la cohérence spatiale (un terme $\gamma_{12}(0)$, que l'on note parfois μ_{12} , mesurerait la cohérence spatiale seule). On voit qu'en général la figure d'interférence produite dans une expérience de fentes d'Young dépend des deux caractéristiques. Elle permet de définir quantitativement le degré de cohérence d'un champ :

- $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$: lumière incohérente (temporellement ou spatialement)
- $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$: lumière cohérente
- $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$: lumière partiellement cohérente.

1.4.3 Théorème de Zernike - van Cittert

Ce théorème (que nous ne démontrons pas, voir par exemple [3]) est l'un des résultats majeurs de la théorie de la cohérence spatiale. Il permet d'obtenir le degré de cohérence spatiale (et donc la longueur de cohérence spatiale) de la lumière émise par une source monochromatique spatialement incohérente de taille finie ℓ , en fonction de la distance z à la source.

⁶D'après le principe d'Huygens-Fresnel, K_1 et K_2 sont imaginaires purs (voir chapitre 6) de telle sorte que K_1K_2 est réel.

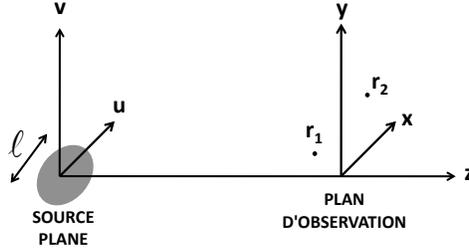


Figure 1.6: Géométrie considérée dans le théorème de Zernike-van Cittert. On considère une source plane de taille ℓ . La direction de propagation Oz est perpendiculaire au plan de la source, pris comme plan $z = 0$. On observe dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz , à une distance z du plan de la source.

Le théorème relie la fonction de cohérence mutuelle dans le plan d'observation, pour $\tau = 0$ (cohérence spatiale), à la distribution d'intensité $I_s(u, v)$ dans la source (avec les notations de la figure 1.6) :

$$\Gamma_{12}(0) = K \int_{\text{source}} I_s(u, v) \exp \left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(u \frac{\Delta x}{z} + v \frac{\Delta y}{z} \right) \right] du dv \quad (1.30)$$

Dans cette expression, λ est la longueur d'onde d'émission, $\Delta x = x_1 - x_2$ et $\Delta y = y_1 - y_2$, avec $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ et $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$ les coordonnées des deux points d'observation. Ce résultat est une conséquence directe des lois de la propagation du champ dans le vide, que nous reverrons dans le chapitre 6. Il montre une relation de transformée de Fourier spatiale entre $\Gamma_{12}(0)$ et $I_s(u, v)$, avec des variables de Fourier spatiales

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta x}{z} \quad \text{et} \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta y}{z}$$

En raisonnant par exemple sur la direction Ox , on a du fait de la relation d'incertitude des transformées de Fourier

$$k_x^{max} \Delta u \simeq 2\pi$$

où Δu est l'étendue de la source selon Ox (extension de l'intervalle de u pour lequel $I_s(u, v)$ est non nulle), et k_x^{max} la plus grande valeur de k_x qui donne une contribution non nulle à l'intégrale dans l'Eq. (1.30). Pour une distance d'observation z donnée, k_x^{max} correspond en fait à un Δx^{max} , c'est-à-dire à un écartement maximum des deux points d'observation \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 le long de Ox au-delà duquel $\Gamma_{12}(0) \simeq 0$. On peut donc identifier Δx^{max} et la longueur de cohérence spatiale ℓ_{spa} . De la relation ci-dessus, on déduit donc directement :

$$\ell_{spa} = \frac{\lambda z}{\ell} = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (1.31)$$

où $\Delta\theta$ est l'angle sous lequel est vue la source depuis le plan d'observation. On retrouve ainsi la relation (1.26) dans le cadre de l'approche statistique.

Une conséquence importante du théorème de Zernike-van Cittert est que la longueur de cohérence spatiale *augmente* avec la distance à la source. Physiquement, lorsque z augmente, $\Delta\theta \rightarrow 0$ et

la source devient ponctuelle. On retiendra qu'une source ponctuelle produit un champ ayant une cohérence spatiale parfaite (de même qu'une source monochromatique produit un champ de cohérence temporelle parfaite).

Application : interférométrie stellaire de Michelson

Une étoile (source incohérente) observée dans un télescope produit une figure de diffraction (tache d'Airy), qui n'a pas de lien direct avec la taille de l'étoile mais dépend de la taille de la pupille du télescope (limite de diffraction, voir chapitre 8). Vue depuis la Terre, même l'étoile la plus proche produit dans le visible une lumière de longueur de cohérence spatiale de 6 m, produisant ainsi un front d'onde spatialement cohérent en entrée du télescope.

Michelson a introduit au début du XXème siècle une technique interférométrique essentiellement fondée sur une expérience de fentes d'Young en entrée d'un télescope, permettant de mesurer le diamètre angulaire des étoiles. L'idée est de mesurer les franges d'interférences, et d'écartier les deux fentes jusqu'à ce que le contraste s'annule. A l'annulation, on a un écartement a_{max} dont on peut déduire directement $\Delta\theta$. Pour une source assimilée à un disque et un télescope à pupille circulaire, le calcul rigoureux donne $\Delta\theta = 1,22 \lambda/a_{max}$. Afin de ne pas perdre trop de signal, on utilise pour λ une longueur d'onde moyenne du spectre de l'étoile (en théorie il faudrait filtrer spectralement pour bien définir λ).

Références

[1] E. Hecht, *Optics* (McGraw Hill, New York, 1975). Existe en édition française.

Pour un traitement plus avancé de la cohérence (théorie statistique) :

[2] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition, chapitre 10.

[3] J. Goodman, *Statistical Optics* (Wiley, New York, 1985).

Chapitre 2

Interférences à ondes multiples

Objectifs

- Etudier les interférences à ondes multiples sur l'exemple de l'interféromètre de Fabry-Pérot.
- Donner le principe de la spectroscopie utilisant un interféromètre de Fabry-Pérot.

2.1 Préliminaire : lame à faces parallèles

Nous étudions pour commencer la réflexion de la lumière par une lame à face parallèle taillée dans un matériau peu réfléchissant (par exemple du verre dans le visible) de telle sorte que seules les deux ondes réfléchies par chacune des interfaces soient à prendre en compte. Nous sommes donc toujours dans le cas d'un phénomène d'interférences à deux ondes.

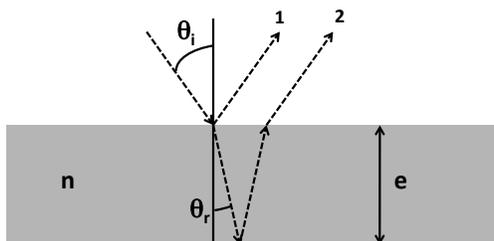


Figure 2.1: Lame à faces parallèles d'épaisseur e formée d'un matériau d'indice n (par exemple du verre d'indice $n = 1,5$ dans le visible).

On suppose que l'onde incidente est un faisceau parallèle de lumière monochromatique (longueur d'onde dans le vide λ), frappant l'interface d'entrée avec un angle d'incidence θ_i (voir figure 2.1). La différence de marche entre les deux faisceaux réfléchis 1 et 2 s'écrit :

$$\delta = \frac{2ne}{\cos \theta_r} - 2e \tan \theta_r \sin \theta_i = \frac{2ne}{\cos \theta_r} - \frac{2ne \sin^2 \theta_r}{\cos \theta_r} = 2ne \cos \theta_r$$

Dans la deuxième égalité on a utilisé la loi de Descartes $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$ (que nous démontrerons plus loin dans le cours), en supposant que le milieu incident a un indice égal à 1 (vide ou air).

Il faut ajouter un déphasage de π (ou une différence de marche de $\lambda/2$) du fait de la réflexion interne du faisceau 2 qui se fait avec un facteur de réflexion de signe opposé par rapport au faisceau 1. On a donc finalement :

$$\delta = 2 n e \cos \theta_r + \frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad \Phi = \frac{4\pi}{\lambda} n e \cos \theta_r + \pi \quad (2.1)$$

Le déphasage Φ dépend de θ_r (angle de réfraction), et donc de θ_i (angle d'incidence). Si on fait varier l'angle d'incidence, on va donc observer un changement d'intensité réfléchie du fait de l'interférence des deux faisceaux 1 et 2. En éclairant avec un faisceau de lumière non parallèle et de section circulaire, on va observer des anneaux à l'infini, avec la condition d'interférence suivante :

$$\begin{aligned} \Phi &= (2p + 1)\pi, \quad p \in \mathbb{Z} : \text{frange sombre} \\ \Phi &= p 2\pi, \quad p \in \mathbb{Z} : \text{frange brillante} \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier ce qui se passe lorsqu'un grand nombre d'ondes (et pas seulement les faisceaux 1 et 2) interfèrent. On réalise cette condition en augmentant la réflectivité des interfaces, pour obtenir une facteur de réflexion en énergie $R \simeq 1$.

2.2 Interféromètre de Fabry-Pérot

2.2.1 Intensité transmise

Le principe de l'interféromètre de Fabry-Pérot est schématisé sur la figure 2.2.

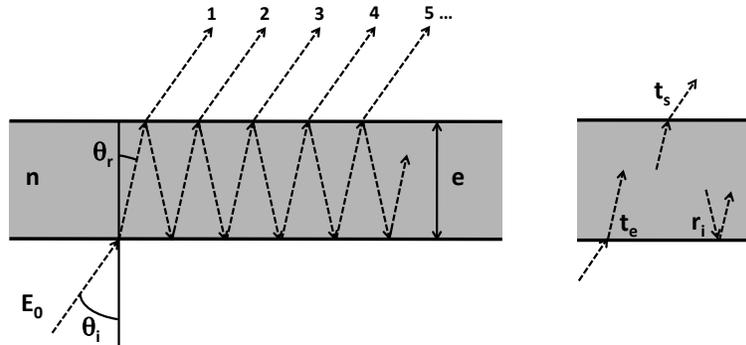


Figure 2.2: Interféromètre de Fabry-Pérot, formé d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n , utilisée en transmission, et dont les faces sont traitées pour avoir une grande réflectivité (couche métallique ou multicouches diélectrique). Les facteurs de transmission et réflexion en amplitude utilisés dans le calcul sont définis sur la figure de droite. On note E_0 l'amplitude de l'onde incidente, supposée plane et monochromatique.

Pour une onde incidente monochromatique d'amplitude E_0 , l'amplitude complexe de l'onde transmise s'écrit sous la forme d'une série (somme sur les différents chemins de la figure 2.2) :

$$E = [t_e t_s \exp(i\Phi/2) + t_e r_i^2 t_s \exp(i3\Phi/2) + t_e r_i^4 t_s \exp(i5\Phi/2) + \dots] E_0$$

où $\Phi = (4\pi/\lambda) n e \cos \theta_r$ est le déphasage sur un aller-retour dans la lame. On peut définir un facteur de transmission global en amplitude t tel que $E = t E_0 \exp(i\Phi/2)$, et qui s'écrit donc :

$$t = t_e t_s [1 + r_i^2 \exp(i\Phi) + r_i^4 \exp(2i\Phi) + \dots] = \frac{t_e t_s}{1 - r_i^2 \exp(i\Phi)}$$

Le facteur de réflexion interne en amplitude est de la forme $r_i = \rho \exp(i\Phi_r)$ où Φ_r est le déphasage à la réflexion. Si l'on définit $\Phi' = \Phi + 2\Phi_r$, déphasage total sur un aller-retour, alors le facteur de transmission global en amplitude se met sous la forme :

$$t = \frac{t_e t_s}{1 - \rho^2 \exp(i\Phi')} \quad (2.2)$$

L'intensité transmise est $I = |t|^2 |E_0|^2$. Pour une onde incidente d'amplitude unité, on a :

$$I = |t|^2 = \frac{T^2}{|1 - \rho^2 \exp(i\Phi')|^2}$$

où $T^2 = |t_e t_s|^2$ est le facteur de transmission "direct" (ou simple passage). Il est possible de simplifier cette expression en introduisant $R = \rho^2$, facteur de réflexion en intensité à une des interfaces. On a alors :

$$I = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Phi'} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \Phi')} = \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Phi'/2)}$$

En définissant

$$I_{max} = \frac{T^2}{(1 - R)^2} \quad \text{et} \quad M = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

l'intensité transmise par l'interféromètre de Fabry-Pérot prend alors la forme de la fonction d'Airy :

$$I = \frac{I_{max}}{1 + M \sin^2(\Phi'/2)} \quad (2.3)$$

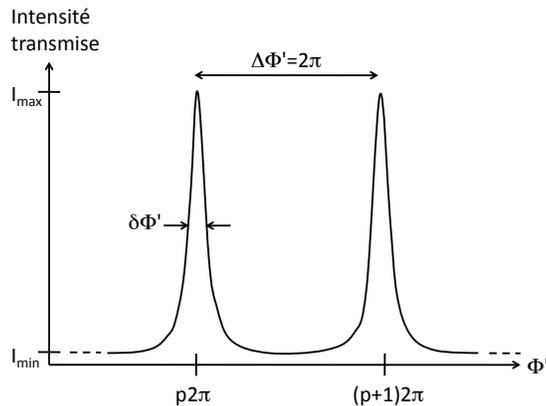


Figure 2.3: Représentation de la fonction d'Airy en fonction du déphasage total Φ' sur un aller-retour. Les maxima sont obtenus pour $\Phi' = p2\pi$, avec p entier (p est appelé *ordre d'interférence*).

Le contraste donné par la fonction d'Airy est :

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2R}{1 + R^2}$$

Un paramètre important qui caractérise l'interféromètre de Fabry-Pérot est sa *finesse* F , définie comme le rapport de l'interfrange à la largeur à mi-hauteur des pics, soit $F = 2\pi/\delta\Phi'$ avec les notations de la figure 2.3. La demi-largeur à mi-hauteur $\delta\Phi'/2$ est telle que $1 + M \sin^2(\delta\Phi'/4) = 2$ (pour avoir $I = I_{max}/2$). Or $\sin^2(\delta\Phi'/4) \simeq (\delta\Phi'/4)^2 = 1/M$. On a donc $F = \pi\sqrt{M}/2$ ce qui s'écrit aussi :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} \quad (2.4)$$

Ordre de grandeur : avec une réflectivité $R = 0,95$, on a $\gamma \simeq 1$ et $F \simeq 60$.

2.2.2 Discussion

- L'intensité transmise varie en fonction de Φ' en suivant la fonction d'Airy (figure 2.3). On peut faire varier Φ' de différentes manières.

Premier exemple : pour une épaisseur e , un indice n et une longueur d'onde λ fixés, on peut éclairer avec une source étendue créant un faisceau non parallèle ayant une distribution d'angles d'incidence θ_i . Dans ce cas l'angle θ_r varie, et on peut observer des anneaux à l'infini.

Deuxième exemple : on peut faire varier l'épaisseur e pour changer la longueur d'onde λ correspondant à un maximum de la fonction d'Airy. Ceci permet de faire de la spectroscopie (nous donnerons le principe dans la section suivante).

- Si le revêtement réfléchissant des interfaces est non absorbant (multicouches diélectrique plutôt que couche métallique), alors on a $T = 1 - R$ et donc $I_{max} = 1$. On a donc au pic de la fonction d'Airy un zéro de réflexion globale, même si $R \simeq 1$! On a en fait une condition d'interférences destructives en réflexion, et constructives en transmission qui fait que même si une interface seule est très réfléchissante, le système complet transmet 100%. On a un système très résonant qui stocke une grande densité d'énergie. Pour un pic donné, le facteur de qualité de la résonance est $Q = \lambda_p/\delta\lambda$ où λ_p est la longueur d'onde du maximum et $\delta\lambda$ la largeur à mi-hauteur. Prenons le cas de l'incidence normale, pour lequel $\Phi' = (4\pi/\lambda)ne$ ($\Phi_r = \pi$ avec un multicouche diélectrique). On a $\lambda_p = 2ne/p$ et $\delta\Phi' = (4\pi/\lambda_p^2)ne \delta\lambda$, et donc finalement $Q = pF$.
- On peut utiliser le principe de l'interféromètre de Fabry-Pérot pour créer un *filtre interférentiel* . Si l'on éclaire le Fabry-Pérot en lumière blanche, on obtient un spectre cannelé. Si l'épaisseur e est suffisamment faible, on peut avoir une seule longueur d'onde transmise dans le visible (c'est-à-dire un seul entier p pour lequel on a $\Phi' = p2\pi$ dans le visible). On a donc créé un filtre. Pour l'incidence normale et avec des interfaces traitées avec un multicouche diélectrique, on a une longueur d'onde de transmission $\lambda = 2ne/p$.

2.3 Spectroscopie avec un Fabry-Pérot

Nous allons décrire ici le principe de la spectroscopie à l'aide d'un Fabry-Pérot (un complément sera étudié en préceptorat).

Principe

On utilise un pic de la fonction d'Airy comme un filtre très sélectif spectralement, dont on peut changer la longueur d'onde de transmission en changeant l'épaisseur e ou l'indice n de l'interféromètre (par exemple en changeant la pression d'un gaz confiné entre les deux interfaces). On peut alors balayer la zone spectrale à étudier, et mesurer l'intensité transmise à chaque longueur d'onde.

Résolution spectrale

Comme souvent en spectroscopie, nous allons raisonner sur le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$. En incidence normale, pour un pic donné (que l'on peut en pratique isoler avec un diaphragme), la position spectrale du maximum est donnée par la relation $\Phi' = 4\pi\sigma ne = p2\pi$ avec p entier (ordre d'interférence). On a donc des maxima en $\sigma_p = p/(2ne)$. La largeur du pic est $\delta\sigma = \delta\Phi'/(4\pi ne) = 1/(2neF)$ où F est la finesse. Le *pouvoir de résolution* est $\mathcal{R} = \sigma_p/\delta\sigma$ qui s'écrit finalement

$$\mathcal{R} = pF$$

Intervalle spectral libre

Le spectre à étudier doit avoir une étendue inférieure à la distance entre deux pics successifs de la fonction d'Airy du Fabry-Pérot (voir figure 2.4). Cette distance définit l'*intervalle spectral libre* $\Delta\sigma_0$, plus grand domaine spectral qu'il est possible d'étudier, et qui est donc donné par

$$\Delta\sigma_0 = \frac{1}{2ne} \quad (2.5)$$

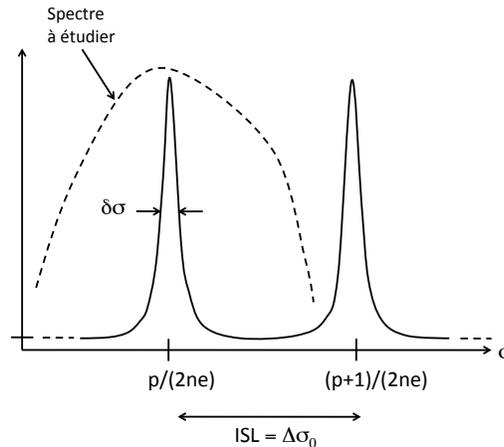


Figure 2.4: Représentation de la fonction d'Airy en fonction du nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ et illustration de la notion d'intervalle spectral libre.

Chapitre 3

Optique géométrique

Ce chapitre est divisé en trois sous-parties :

A/ Interfaces et milieux à gradient d'indice

B/ La qualité des images et le stigmatisme

C/ Brefs rappels de l'optique de Gauss

L'équation des rayons lumineux est démontrée dans l'Annexe B.

Ch. I - OPTIQUE GEOMETRIQUE : INTERFACES ET MILIEUX A GRADIENT D'INDICE

Objectifs de ce chapitre :

En vous rappelant les notions qui permettent de connaître la trajectoire des rayons lumineux à travers quelques systèmes simples (miroirs, interfaces) ou plus complexes (milieux d'indice variable), nous pouvons déjà parler de quelques phénomènes « naturels » d'observation courante (Les Mirages, Les Ondes radio dans l'atmosphère...) mais aussi de composants optiques récents comme les fibres ou les lentilles « à gradient d'indice » qui sont en train de changer le mode de fabrication et le montage des pièces optiques que nous connaissons (lentilles avec des faces courbes).

Conceptuellement le principe de Fermat est aussi très riche et peut servir de base pour discuter quelques points de physique classique (analogie avec le principe de moindre action de Maupertuis) ou quantique (influence des trajectoires virtuelles des photons).

Au cours de ce chapitre on « oublie » la nature ondulatoire (électromagnétisme) et le caractère quantique de la lumière (photons) et on se préoccupe seulement du comportement de la lumière.

Les lois

Ce sont celles de Descartes et de Snell (vers 1620) :

- La lumière se propage de façon rectiligne dans un milieu homogène.
- Le rayon incident, la normale et le rayon réfléchi sont dans un même plan et

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

- Le rayon incident, la normale et le rayon réfracté sont dans un même plan et $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (avec $n_i = \frac{c}{v_i}$, v_i vitesse [de phase] de la lumière dans les différents milieux).

Rq : 1) Sans aller plus loin vous pouvez « découper » un milieu complexe, hétérogène, en tranches minces pour lesquelles ces relations s'appliquent et « intégrer » le résultat (numériquement par exemple) pour avoir la trajectoire des rayons.

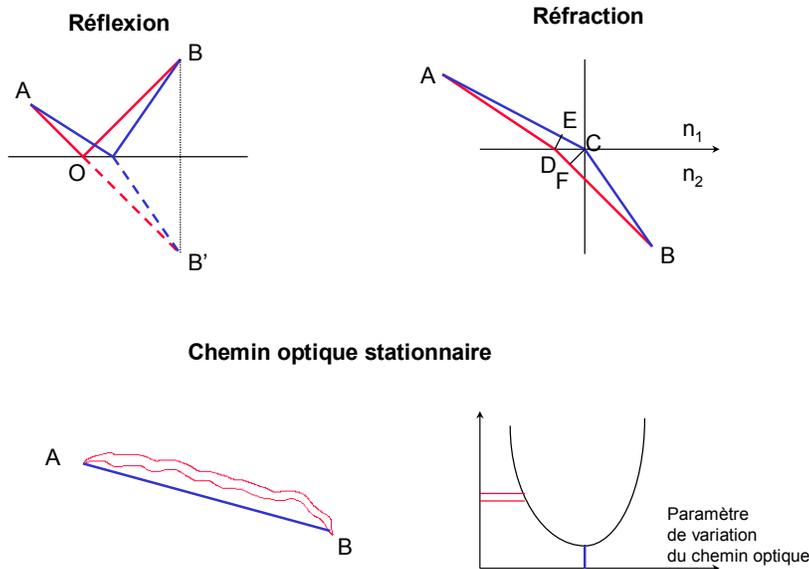
De la même façon vous pouvez suivre un ensemble de rayons à travers une suite de lentilles de formes données...

2) L'astronome grec Ptolémée (140 AC) avait établi expérimentalement ces lois avec une précision « raisonnable » mais il ne connaissait pas encore les fonctions trigonométriques pour exprimer analytiquement les lois de la réfraction.

a) Le principe de Fermat

En 1650 Fermat énonce le principe suivant :

Parmi tous les chemins possibles pour aller d'un point à un autre la lumière choisit le plus court en temps.



1) Exemple : de $A \rightarrow B$ en passant par un miroir : Réflexion. (figure ci-dessus)

- Soit un chemin (ADB) . Si B' est sym. de B par rapport au plan du miroir. $(ADB) = (ADB')$.
Donc le chemin le plus court est celui qui correspond au point C : ACB' soient alignés.
Les angles marqués étant égaux on retrouve la loi de la réflexion.

2) De $A \rightarrow B$ en passant par un dioptre plan : Réfraction. (figure ci-dessus)

(Remarque « historique » : Les grecs pensaient que c'était la distance qui devait être minimum ce qui est faux ici mais rend compte de la réflexion).

- Soit (ACB) le chemin optique minimum et (ADB) un chemin voisin. Si DC est un ∞ petit il n'y a pas de changement du chemin optique au second ordre près au moins.

$$\text{Donc } (EC) = (DF) \quad n_1 DC \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n_2 DC \cos\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right)$$

$$\text{Soit } n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

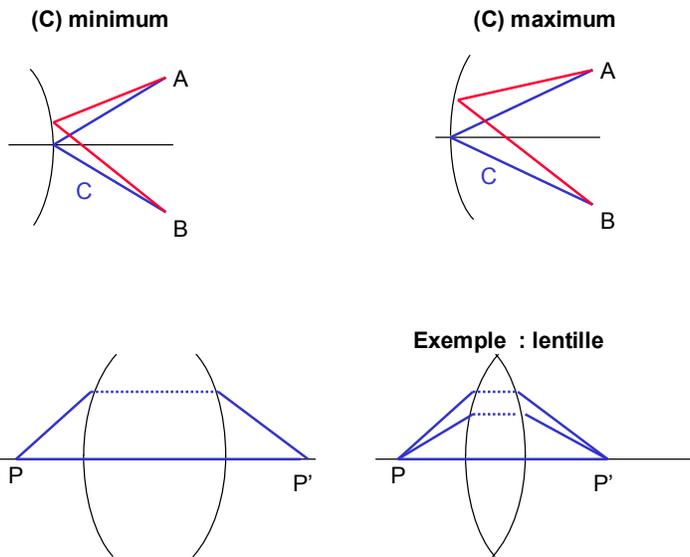
Remarque :

1) De façon plus précise le principe de Fermat s'énonce ainsi : « La lumière emprunte un chemin tel que l'intégrale représentant le chemin optique soit stationnaire (chemin optique

$$L = \int_A^B n ds, \text{ s abscisse curviligne) } \gg$$

2) Le chemin optique un extremum (maximum ou minimum). (figure ci-dessus)

3) Ce résultat est prévisible si on introduit le caractère ondulatoire de la lumière (figure ci-dessus) : à chaque chemin non stationnaire on pourrait associer un chemin voisin différent de $\lambda/2$, c'est à dire en opposition de phase \rightarrow contribution nulle de tels chemins (virtuels importants en électrodynamique quantique).



b) Applications du Principe de Fermat

- Retour inverse : si (AB) est un extremum (BA) l'est aussi.
- Coucher de soleil. En fait le soleil qui nous paraît à l'horizon est déjà au-delà de l'horizon car l'atmosphère est de moins en moins dense quand on s'élève .
- Mirage dans les déserts et sur les routes.
- Ondes Radio dans la haute atmosphère (on peut capter tous les points du globe en ondes courtes ~ qq 10 m)
- Système Optique en général. (figure ci-dessus)

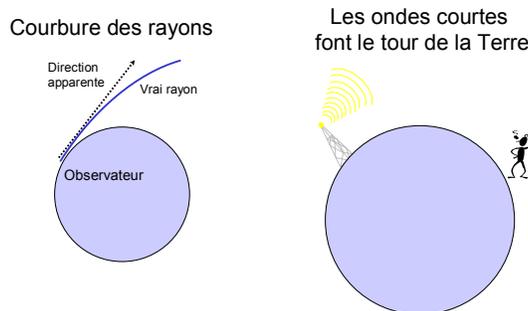
Si on a un système qui est capable de collecter la lumière émise par P et de la focaliser en P', elle peut aller en ligne droite au centre. Tous les autres trajets doivent également avoir même chemin sans cela la lumière n'en choisirait qu'un seul.

Exemple : une lentille convergente.

Comme la lumière va moins vite dans le verre, il y a compensation entre le rayon direct PP' et ceux plus inclinés qui traversent moins de verre.

Ondes Radio : à 100 km d'altitude l'air est ionisé (par les U.V...) et la vitesse des ondes courtes est $>c$ et variable.

→ Courbure, réflexion au sol et possibilité de faire le tour de la terre. (figure ci-dessous)



Expression analytique du principe de Fermat

C'est un outil pas toujours facile à intégrer analytiquement (nous verrons quelques cas simples où cela est possible) mais qui peut s'intégrer numériquement pour calculer la trajectoire des rayons dans des milieux dont l'indice n n'est pas constant.

Rappel (Démonstration dans les livres de Taupé ou de Deug. Ex : Perez, Optique, Masson ed. p 172 Masson, mais seul le résultat nous intéresse ici).

Pour un rayon lumineux on a une trajectoire régie par l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \vec{\text{grad}} n} \quad (1)$$

où s est l'abscisse curviligne et n l'indice et \vec{u} le vecteur unitaire tangent à la trajectoire $\left(\vec{u} = \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$. Si \vec{N} est le vecteur unitaire porté par la normale principale à la trajectoire

$$\text{on } \frac{d(n\vec{u})}{ds} = n \frac{d\vec{u}}{ds} + \frac{dn}{ds} \vec{u} \text{ soit } n \frac{\vec{N}}{R} + \frac{dn}{ds} \vec{u} = \vec{\text{grad}} n. \quad (2)$$

Utilisation de l'expression analytique du principe de Fermat :

(1) Propagation rectiligne dans un milieu homogène et isotrope $\vec{\nabla}n = 0 \Rightarrow \frac{dn}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{n}{R} = 0 \Rightarrow R \rightarrow \infty$. Les trajectoires sont rectilignes.

(2) Propagation dans un milieu non homogène. Supposons que le plan de figure soit un plan de symétrie.

$$\text{En x (2) par } \vec{N} : \vec{N}\vec{\nabla}n - \vec{T}\vec{N} \frac{dn}{ds} - n \frac{\vec{N}\vec{N}}{R} = 0$$

$$\frac{dn}{dN} - 0 - \frac{n}{R} = 0$$

(dérivée de l'indice dans la direction \perp à la trajectoire)

$$\frac{dn}{dN} = \frac{n}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{dn}{ndN} = \frac{d(\log n)}{dN}$$

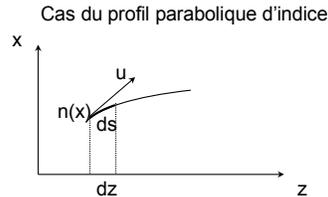
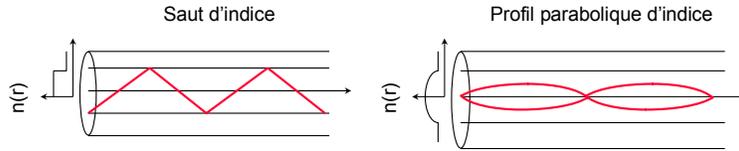
Calcul de la courbure des rayons : Effet Mirage :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dT}{T}, \quad \frac{n-1}{\rho} = ct^e$$

$$\frac{dn}{n-1} = -\frac{dT}{T}, \quad \frac{1}{n-1} \frac{dn}{dh} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dh} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1-n}{nT} \frac{dT}{dh}$$

où h désigne l'altitude.

Dans un désert en plein soleil : $dT/dh \sim 1^\circ/\text{cm}$, $(n-1) \sim 3 \cdot 10^{-4}$, d'où $R \sim 10 \text{ km}$. Cela nous donne l'échelle des phénomènes observables.



(3) Lentilles et fibres optiques à gradient d'indice. Cas du profil Parabolique d'indice.

$$n(r) = n_0(1 - \alpha r^2) \quad n_0 = 1,5 \quad \alpha = 10 \text{ cm}^{-2}$$

- Approximation « paraxiale » $ds \approx dz$. (figure ci-dessus)

- Symétrie de révolution \rightarrow on regarde le plan de section xOz : $n(x) = n_0(1 - \alpha x^2)$

On projette $\frac{d}{ds}(n\vec{u}) = \overline{\text{grad } n}$ sur ox : $\frac{d}{dz}\left(n \frac{dx}{dz}\right) = \frac{dn}{dx} = -2\alpha x n_0$

soit au second ordre près en x : $\frac{d^2x}{dz^2} + 2\alpha x = 0$

Les solutions sont la forme: $x(z) = A \cos \sqrt{2\alpha}z + B \sin \sqrt{2\alpha}z$

On a les conditions initiales en $z=0$ $A=x_0$ $B = \frac{x'_0}{\sqrt{2\alpha}}$ (position et pente du rayon).

$$\begin{cases} x'(z) = -\sqrt{2\alpha}x_0 \sin(\sqrt{2\alpha}z) + \frac{x'_0}{\sqrt{2\alpha}} \cos(\sqrt{2\alpha}z) \\ x(z) = x_0 \cos \sqrt{2\alpha}z + \frac{x'_0}{2\alpha} \sin(\sqrt{2\alpha}z) \end{cases}$$

Pour retrouver l'image du point ($z=0, x=x_0$) il faut avoir $x(z)=x_0 \forall x'_0$

$$\Rightarrow \sin \sqrt{2\alpha}z = 0 \quad z = \frac{k\pi}{\sqrt{2\alpha}} \approx 7_{\text{mm}} * k \quad \text{et } x(z) = \pm x_0 \text{ (grandissement } \mp 1)$$

- Ces lentilles ont une forme cylindrique, il est donc très facile de les monter, de les centrer, etc... à la différence d'une lentille concave à bord mince.
- Les fibres à gradient d'indice présentent, en terme d'information, de gros avantages par rapport à des fibres à « saut » d'indice. Dans une fibre à saut d'indice la dispersion de chemins optiques (donc des temps de parcours) entre un rayon qui va « tout droit » et un rayon qui correspond à l'angle de réflexion « limite » $i_\ell \left(\sin i_\ell = i_\ell = \frac{n_{\text{gaine}}}{n_{\text{coeur}}} \right)$ peuvent atteindre quelques %. Sur 20 km avec un indice $n_{\text{gaine}} \approx 1,5$ cela fait quelques 10^{-6} s de fluctuation de temps de transit entre l'entrée et la sortie de la fibre : c'est inacceptable pour passer une émission TV par exemple qui requiert quelques MHz en bande passante.
- Dans une fibre à gradient d'indice, comme on trouve périodiquement l'image de chaque point de l'entrée, la dispersion du temps de transit est nulle d'après le principe de Fermat (en pratique on gagne deux à trois ordres de grandeur).

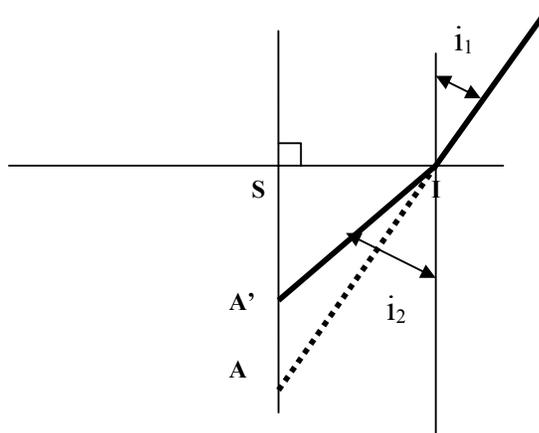
Ch. I - OPTIQUE GEOMETRIQUE :
B - LA QUALITE DES IMAGES ET LE STIGMATISME

Objectif de ce chapitre

Les lois de l'optique géométrique sont très simples. Cependant appliquées à la formation d'une image (en suivant un rayon à partir d'une source en A vers un écran ou un détecteur en A') elles conduisent presque toujours à l'observation d'aberrations. L'image d'un point n'est plus un point mais une tache plus ou moins grosse.

Quels sont les critères simples qui peuvent nous assurer de « bonnes images » ? Y-a-t-il des systèmes optiques simples et « parfaits » ? Le but de ce chapitre est aussi de vous donner quelques réflexes et quelques ordres de grandeur et de vous rappeler qu'il n'y a pas d'obstacle à la fabrication de surfaces optiques complexes si besoin est.

Observons quelques systèmes simples



a) Un dioptre plan

C'est le cas d'un objet que vous regardez dans l'eau (calme). Nous allons suivre tous les rayons issus d'un point A de l'objet ; ce que nous souhaitons c'est qu'ils nous paraissent tous venir d'un point A' image de A à travers le dioptre plan. On peut écrire :

$$\overline{SA'} = IS \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) \quad \overline{SA} = IS \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) \quad \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\operatorname{tgi}_1}{\operatorname{tgi}_2}$$

Or c'est le rapport $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = \operatorname{ct}^e$ d'après la loi de Descartes. Donc la position de A' varie

avec l'incidence \Rightarrow Pas de stigmatisme $\overline{SA'}/\overline{SA} = n_2 \cos i_2 / n_1 \cos i_1$.

Sauf $\overline{SA} = 0$ (surface) $\overline{SA} \rightarrow \infty$ objet à l' ∞ (i_1 et i_2 ct).

Conclusions ?

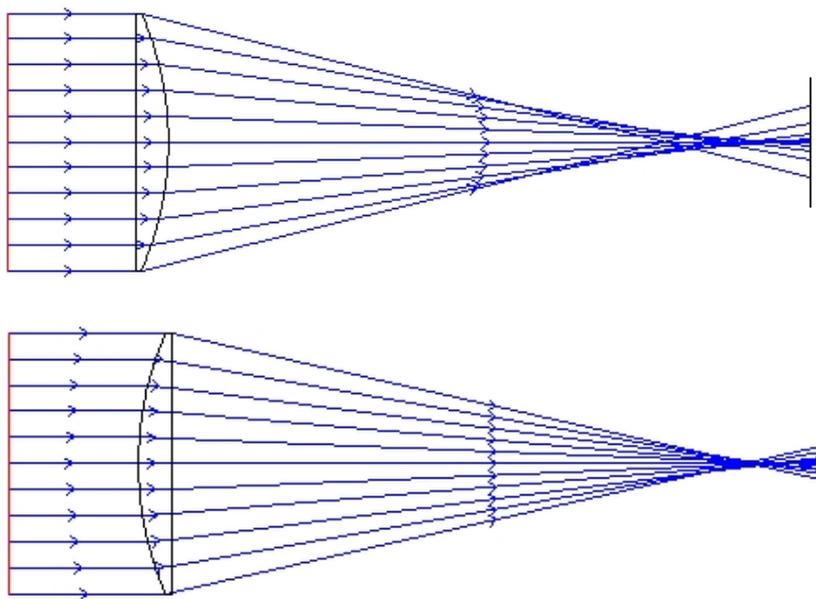
- On voit donc que pour les angles d'incidence faible on ne va pas trop abîmer l'image (tant que le sinus et la tangente seront voisins) puis aux angles plus importants la situation va vite (c'est à dire de façon fortement non linéaire) se dégrader (en même temps que le sinus et la tangente vont différer).
- On peut aussi se demander pourquoi l'image paraît si bonne lorsqu'on regarde depuis la rive un objet sous l'eau : c'est que la petite taille de la pupille de l'œil et la distance à la surface vont fortement limiter les angles d'incidence sur le dioptre.

- Retenez donc qu'un système aussi simple que le dioptre plan (ou la lame à face parallèle) dégrade la qualité des images (on dit n'est pas stigmatique) si l'objet n'est pas à l'infini ou sur le dioptre.
Conséquences (à voir à l'Ecole lors des TP) :
- En biologie, une préparation est souvent placée entre une lame de verre ($e \approx 1\text{mm}$) et une lamelle ($e \approx 0,15\text{mm}$). L'influence de cette dernière doit être corrigée pour l'objectif d'observation. Cette correction n'existera par pour un objectif métallographique qui permet de voir directement les « grains » des aciers attaqués chimiquement.
- Suggestion : Regardez à travers un prisme collé sur l'œil, notez la déformation des objets. Pourquoi est-ce meilleur lorsque le prisme est au « minimum de déviation ? » (stationnarité) ou lorsque le prisme a un petit angle (dans ce dernier cas on a : $D=(n-1) A=ct^\circ$, $A=$ angle de prisme, $D=$ déviation).

b) Une lentille et un objectif.

Le tracé des rayons a été fait avec un programme qui applique simplement les lois de Descartes.

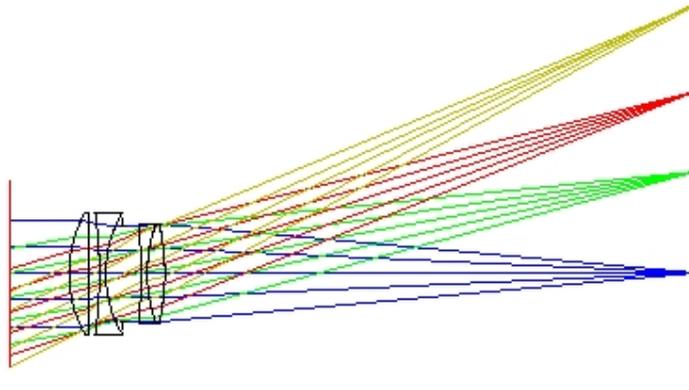
Avec la lentille plan-convexe on constate (figure ci-dessous) :



- Que les rayons s'écartent rapidement du foyer « paraxial ».
- Que la situation où la lentille a sa face bombée vers la lumière parallèle est plus favorable.

Cette différence s'explique encore une fois à cause du caractère très « non linéaire » des aberrations (typiquement ici la tache varie comme la hauteur au cube puis à la puissance 5...). Dans le cas a, le premier angle d'incidence est 0 et le second est très grand $\sim i_{\text{max}}$. Dans le second cas les 2 angles dans le verre valent $\sim i_{\text{max}}/2$ et les aberrations se trouvent ainsi fortement réduites $\left(\sim 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \right)$.

Avec l'objectif photographique (Tessard Zeiss : figure ci-dessous) ici composé de 3 éléments (une lentille plan-convexe, une lentille biconcave et un doublet composé d'une lentille biconvexe collée à une lentille plan-convexe) on voit que les choses s'améliorent considérablement.



Pour des points à l'infini sur l'axe ou inclinés par rapport à l'axe, il n'est pas possible de voir les aberrations à l'échelle de cette figure et les épaisseurs des traits (peut-être les verrons nous avec un film photographique dont le « grain » est de 20 μm environ).

En se donnant du mal (ici en multipliant les composants, donc le prix) on arrive à concevoir (aujourd'hui par des méthodes numériques) et à réaliser des systèmes de « bonne qualité ». Notons qu'un objectif photo zoom (à focale variable) utilise une quinzaine de lentilles et un bon objectif de microscope une dizaine.

Systèmes parfaits (pour 2 points). Quelques exemples de stigmatisme

Définition : Un système optique qui possède un couple de point (A et A') image l'un de l'autre est stigmatique. A et A' peuvent être à distance finie ou à l'infini.

D'après le principe de Fermat, tous les chemins optiques pour aller de A vers A' sont égaux. Comme un point source émet une onde sphérique (ou une onde plane lorsqu'il est à l'infini), la condition de stigmatisme devient pour les surfaces d'onde :

- Une sphère (centrée sur A) \leftrightarrow Une sphère (centrée sur A').
- Une sphère \leftrightarrow un plan (objet ou image à l'infini).
- Un plan \leftrightarrow un plan (objet et image à l'infini, système afocal).

Exemples de systèmes stigmatiques

On va chercher des systèmes basés sur la réfraction (dioptries) ou sur la réflexion (miroirs) qui sont stigmatiques.

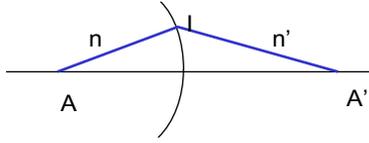
a) **Dioptries** $(AA') = n\overline{AI} + n'\overline{IA'} = c\ell^2$

Ces surfaces de révolution autour de l'axe AA' donnent des « ovales de Descartes » dans un plan de section. Longtemps considérées comme des objets exotiques, ces surfaces asphériques peuvent être réalisées avec une très grande précision avec des machines à commande numérique dont l'outil est un diamant contrôlé en position par un système interférométrique (cf. chapitre d'introduction).

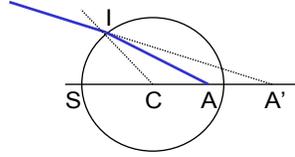
Grâce à un très bon contrôle des matériaux polymères on peut aussi réaliser des surfaces asphériques de très bonne qualité par moulage (c'est le cas des appareils Kodak compacts par exemple).

Dans le cas où la constante est nulle $IA/IA' = n/n'$, le lieu des points I dont le rapport des distances à deux points fixes (A et A') est constant est une sphère (figure ci-dessous) .

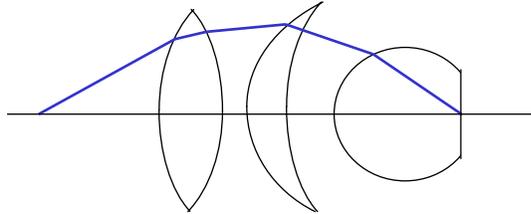
Stigmatisme des dioptrés



Points de Weierstrass



Application : objectif de microscope



On trouve les points d'Young-Weierstrass qui sont deux points conjugués (image l'un de l'autre) stigmatiques du dioptre sphérique. Ils vérifient la relation :

$$\overline{CA} = \overline{SC} \cdot \frac{n}{n'} \quad \overline{CA'} = \overline{SC} \cdot \frac{n'}{n}$$

Application importante : Objectif de microscope (figure ci-dessus)

Grâce à un tel dioptre sphérique utilisé aux points d'Young-Weierstrass, un point objet A situé « dans le dioptre » d'indice n (on utilise un liquide d'indice n égal à celui du verre)

donne un point image A' stigmatique avec un grossissement $\frac{CA'}{CA} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \approx 2,3$.

C'est une première étape dans la suite des images agrandies de l'objet. Les rayons émergents sont moins inclinés sur l'axe aussi les corrections à réaliser par la suite sont-elles plus aisées.

Rappel :

b) Miroirs (figure ci-dessous)

A et A' réels (chemins >0) ou virtuels (chemins <0).

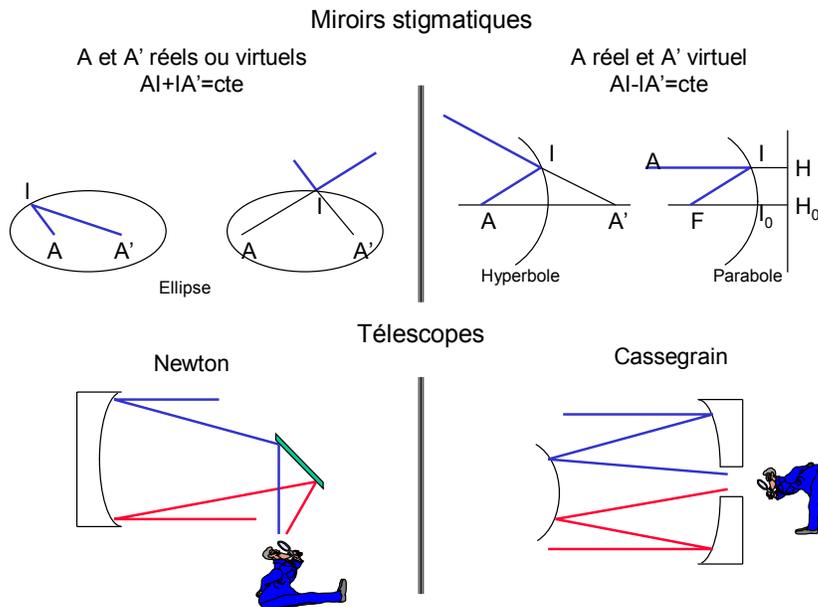
$$AI + IA' = ct^e \quad \ell + \ell' = ct^e \quad \text{ou} \quad -(\ell + \ell') = ct^e \quad \underline{\text{Ellipse}}$$

$$A \text{ réel, } A' \text{ virtuel} \quad (\ell - \ell') = ct^e \quad \underline{\text{Hyperbole}}$$

Un point à l' ∞ . On compte les chemins à partir d'un plan d'onde à distance finie

$$\overline{HI} - \overline{IF'} = ct^e \quad \text{si } ct^e = 0 \quad HI = IF' \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{Paraboloïde}}$$

Application : Astronomie



c) Systèmes dioptriques ou à miroir

- Lentille plan hyperbolique.
- Lentille sphéro-elliptique.

Ces éléments interviennent aujourd'hui dans la technologie des objectifs de qualité.

Télescopes. Systèmes de haute qualité optique.

- Miroir parabolique + Miroir plan (Newton).
- Miroir parabolique + Miroir hyperbolique Cassegrain (utilisé pour certains télé-objectifs).

Actuellement jusqu'à 8 m de diamètre.

Polissage $\lambda/5$. Plusieurs tonnes (précision de direction ~de la seconde d'arc...).

Problème de l'atmosphère : Correction des miroirs déformables en temps réel.

Remarque :

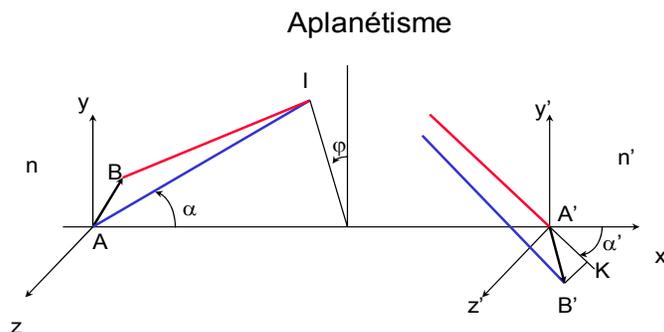
Avec un système stigmatique pour un couple de points on peut faire des images de qualité par balayage de l'objet.

Si l'on veut faire l'image en une seule prise de vue avec un détecteur d'image on doit considérer l'aplanétisme du système.

Aplanétisme :

Si l'on veut faire des images il faut savoir comment va varier la qualité de l'image lorsqu'on s'éloigne des points pour lesquelles il y a stigmatisme.

On va chercher une condition mathématique dans le cas où B et B' sont voisins de A et A' (AB ∞ petit du 1^{er} ordre).



Si B et B' sont des points conjugués voisins de A et A' on dira qu'il y a aplanétisme, si l'on suppose A et A' étant stigmatiques B et B' le sont également.

- Instrument de révolution
- B et B' dans le même méridien.
- I définit deux rayons issus de A et B hors du plan de figure.

Si A et A' d'une part B et B' de l'autre sont stigmatiques.

$$(AIA') = ct^e \Rightarrow (AIA') - (BIB') = ct^e = n\overline{AK} - n'\overline{A'K'}$$

$$(BIB') = ct^e$$

$$\text{or } \overline{AK} = \overline{AB} \cdot \vec{u} \quad \overline{AK'} = \overline{A'B'} \cdot \vec{u}'$$

$$\overline{AB} \begin{cases} dx \\ dy \\ 0 \end{cases} \cdot \vec{u} \begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\varphi \\ \sin\alpha\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \overline{AK} = dx \cos\alpha - dy \sin\alpha \cos\varphi$$

$$\Rightarrow (AIA') - (BIB') = (ndx \cos\alpha - n'dx' \cos\alpha') + (ndy \sin\alpha - n'dy' \sin\alpha') \cos\varphi = ct^e$$

$$\text{Pour avoir une } ct^e : \text{ Indépendant de } \varphi = \boxed{ndy \sin\alpha = n'dy' \sin\alpha'}$$

C'est la condition d'Abbe

qui sera aussi la condition de stigmatisme pour dx=0.

Si on se déplace sur l'axe (dy = dy' = 0) on aura : ndx cos alpha - n'dx' cos alpha' = ct^e . Pour alpha=alpha'=0, ct^e=ndx-n'dx'

On en déduit la condition d'Herschel :

$$ndx(1 - \cos\alpha) = n'dx'(1 - \cos\alpha') \text{ ou}$$

$$\boxed{ndx \sin^2 \frac{\alpha}{2} = n'dx' \sin^2 \frac{\alpha'}{2}}$$

Remarque :

1) Incompatibilité des deux relations : pour n, n', dx, dx' et dy, dy' fixés, il faut réaliser à la

$$\text{fois } \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = ct^e \text{ et } \frac{\sin^2\alpha/2}{\sin^2\alpha'/2} = ct^e \text{ soit } \frac{\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha'/2)\cos(\alpha'/2)} = ct^e .$$

Ces conditions ne sont réalisées simultanément que pour $\alpha = \pm\alpha'$.

Ce serait le cas du miroir plan par exemple mais en général on ne peut respecter les deux relations à la fois.

2) Cas des objets à l'infini.

Si l'objet $\rightarrow \infty$, il est défini par son diamètre apparent $d\theta$. Si h est la hauteur des rayons sur la pupille.

$$\sin \alpha \sim \alpha = \frac{h}{-x} \quad d\theta \approx \frac{dy}{x}.$$

$$n dy \sin \alpha = n d\theta \frac{h}{-x} = -nhd\theta.$$

Et la relation d'Abbe devient :

$$\underline{-nhd\theta = n'dy'\sin \alpha'}$$

3) Stigmatisme approché – Approximation de Gauss.

Dans quelle limite avons-nous besoin de systèmes optiques rigoureusement stigmatiques ?

Les détecteurs d'images : œil, plaque photographique, tube vidicon... ont une résolution limitée.

Ex. : 1° pour l'œil ~ quelques dizaines de microns pour le grain de l'émulsion d'une plaque photo, une dizaine de microns pour les capteurs CCD des caméscopes...

Il suffit donc que l'image d'un point soit localisée dans un petit volume pour que le système détecteur ait la même information que pour une image ponctuelle. On dit qu'il y aura stigmatisme approché.

Supposons que les surfaces des optiques soient limitées au voisinage des axes.

Soit un point A , A' son image. Les angles d'ouverture α , α' sont faibles et les surfaces d'onde Σ' peuvent être confondues avec leur sphère osculatrice S' (exemple : un miroir elliptique ou un miroir sphérique).

De plus pour α et α' petits les conditions d'Abbe et d'Herschell se réduisent à $\alpha/\alpha' = ct^e$ et sont donc compatibles.

C'est ce qu'on appelle le domaine paraxial qui correspond aux conditions de l'Approximation de Gauss.

Remarque : Pourquoi les systèmes imageurs à fibres échappent-ils à ces lois ?

Ch. I - OPTIQUE GEOMETRIQUE
C - BREF RAPPEL DE L'OPTIQUE DE GAUSS

(Voir par exemple Perez : Systèmes Centrés)

Conditions :

- Petits objets – Petites ouvertures
- Angles de champ et d'ouverture réduits.
- Angle d'incidence faibles sur dioptrés et miroirs.

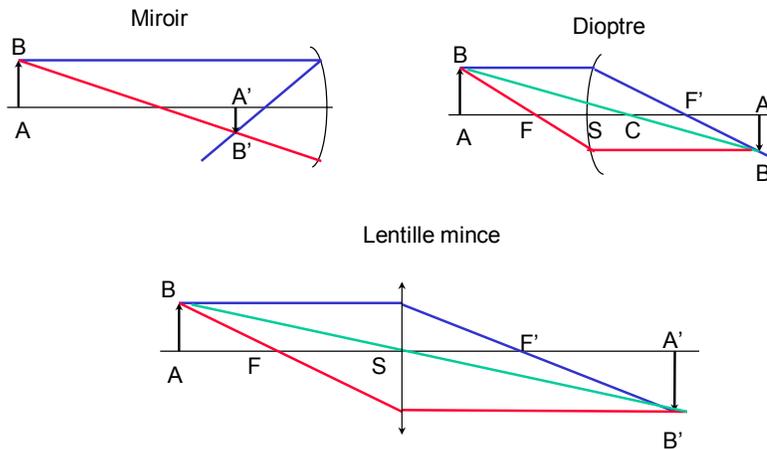
Stigmatisme (approché) : $\begin{cases} ndy\alpha = n'dy'\alpha' \\ ndx\alpha^2 = n'dx'\alpha'^2 \end{cases}$ Inv. Lagrange.

$$\rightarrow \gamma_y = \frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \frac{\alpha}{\alpha'} \quad \gamma_x = \frac{n}{n'} \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} > 0 \quad \gamma_y^2 = \frac{n}{n'} \gamma_x .$$

Discussion :

- 1) Importances de ces relations qui évitent de faire des erreurs grossières de conception de systèmes.
- 2) Distorsion des images 3D car $\gamma_y \neq \gamma_x$.

Approximation de Gauss



Miroirs : (figure ci-dessus)

$$\frac{1}{\overline{SA'}_{>0}} = \frac{1}{\overline{SA}_{<0}} + \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SF}} .$$

Points particuliers : C : $\gamma_x = 1$ S : $\gamma_y = 1$ $\gamma_\alpha = -1$

Dioptres : (figure ci-dessus)

$$\frac{n}{SA} - \frac{n'}{SA'} = \frac{n-n'}{SC} \quad \frac{n'}{SA'} = \frac{n}{SA} + \frac{n'-n}{SC}$$

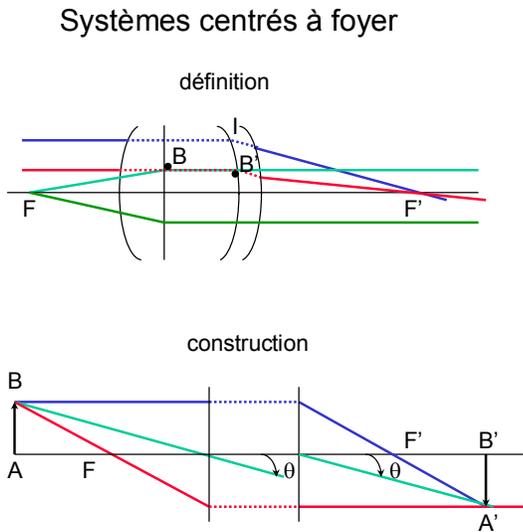
$$A \rightarrow \infty \quad \overline{SF'} = \overline{SC} \frac{n'}{n'-n} \quad A' \rightarrow \infty \quad \overline{SF} = \overline{SC} \frac{n}{n-n'}$$

$$\overline{FA.F'A'} = \overline{SF.SF'} \quad \text{car} \quad \gamma_y = -\overline{F'A'}/\overline{SF'} = -\overline{SF}/\overline{FA}$$

Lentilles (= 2 dioptres) minces : (figure ci-dessus)

$$\frac{1}{SA'} = \frac{1}{SA} + (n-1) \left(\frac{1}{SC_1} - \frac{1}{SC_2} \right) \quad \text{avec} \quad (n-1) \left(\frac{1}{SC_1} - \frac{1}{SC_2} \right) = \frac{1}{f'} = D \quad (D : \text{convergence}).$$

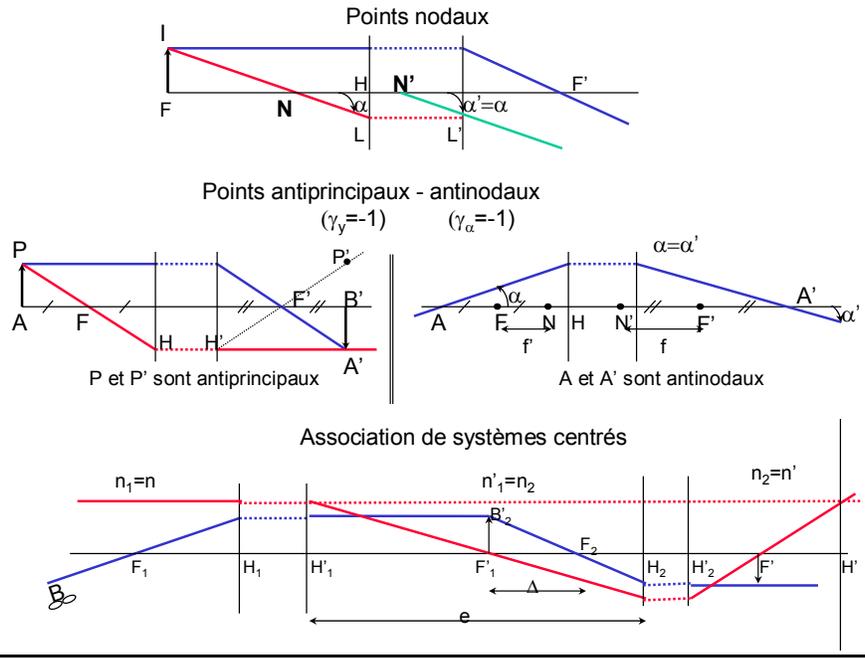
Généralisation : systèmes centrés (à foyer) : (figure ci-dessous)



But : généraliser les relations (homographiques) et les points particuliers S, C, F... à des systèmes complexes.

- Plans principaux $\gamma_y = 1$ $D = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$. Les relations des lentilles minces ou des dioptres deviennent : $\overline{FA.F'A'} = \overline{HF.H'F'}$ et $\frac{n'}{H'A'} = \frac{n}{HA} + D$.
- Points nodaux $\gamma_\alpha = 1$ $\overline{H'F'} = \overline{FN}$ $\overline{HF} = \overline{F'N'}$ ($\equiv H, H'$ si $n = n'$). (figure ci-dessous)
- Antiprincipaux $\gamma_y = -1$ Antinodaux $\gamma_\alpha = -1$.

Les points principaux objet (ou image) sont symétriques des points nodaux objet (ou image) par rapport aux foyers objet (ou image).



Association de deux systèmes centrés à foyers (figure ci-dessus)

L'ensemble global forme un système centré. Soit un objet à l'infini vu sous un angle θ . Pour connaître la convergence du système on peut utiliser le fait que $y' = -f\theta$ (y' taille de l'image finale au foyer du système).

Or $y'_1 = -f_1\theta$ et $(\gamma_y)_2 = \frac{f_2}{\Delta} = -\frac{f}{\sigma}$ $y' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \theta$ $f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$. On verrait de même que $f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$.

Comme $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = \overline{F'_1 H'_1} + \overline{H'_1 H_2} + \overline{H_2 F_2} = -f'_1 + e + f_2$, on peut écrire :

$D = -\frac{n}{f} = -\frac{\Delta n}{f_1 f_2} = -\frac{n}{f_1} - \frac{en}{f_1 f_2} + \frac{nf'_1}{f_1 f_2}$ or $D_1 = \frac{-n}{f_1} = \frac{N}{f'_1}$ et $D_2 = \frac{-N}{f_2}$, on en déduit :

$D = D_1 + D_2 - \frac{e}{N} D_1 D_2$.

Pourquoi toutes ces notions ?

Trop souvent nous avons tendance à considérer les systèmes optiques complexes comme de simples lentilles. Si les plans principaux sont les analogues du sommet d'une lentille ils sont souvent très décalés du système optique (rejetés loin devant ou derrière).

Exemples : En photographie, on utilise :

- Des téléobjectifs (faible champ, fort grandissement) dont la focale (ex 300 mm) est très supérieure à l'encombrement (ex 80 mm).
- Des objectifs grand angle (grand champ, faible grandissement) dont la focale est inférieure à la distance au film (dans les appareil reflex cette distance est de ~ 30 mm et il y a des focales de 15 mm).

Chapitre 4

Photométrie

Objectifs

- Introduire les outils permettant de décrire la propagation de l'énergie lumineuse et la mesure des flux dans le cadre de l'optique géométrique.
- Présenter les propriétés du rayonnement de corps noir et quelques généralités sur les unités photométriques et les ordres de grandeur.

Dans ce chapitre on s'intéresse au transport et à la détection de l'énergie lumineuse. Nous allons introduire, suivant une approche phénoménologique, les grandeurs utiles et leur utilisation. D'un point de vue pratique, l'objectif est de savoir modéliser le transfert d'énergie de la source au détecteur dans un montage optique dont la structure générale est schématisée sur la figure 4.1. Une telle modélisation permet d'évaluer les signaux mesurés dans des cas concrets, et d'optimiser les montages pour recueillir un maximum de signal. On se place dans le cadre de l'optique géométrique.

4.1 Grandeurs photométriques

4.1.1 Luminance

Soit dS un élément de surface d'une source de lumière, centré au point \mathbf{r} et de normale \mathbf{n} . On s'intéresse au flux $d\Phi$ (unité W) émis par dS dans la direction \mathbf{u} (voir figure 4.2).

La manipulation des flux directionnels est à la base de la photométrie. Pour cela on introduit la luminance $L(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ de la source (unité $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$), qui est telle que le flux émis par dS dans la direction \mathbf{u} s'écrit :

$$d\Phi = L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta dS d\Omega \quad (4.1)$$

Dans cette expression, θ est l'angle entre \mathbf{n} et la direction d'observation \mathbf{u} (on a donc $\cos \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$), et $d\Omega$ est l'élément d'angle solide centré autour de \mathbf{u} . Cet angle solide élémentaire est

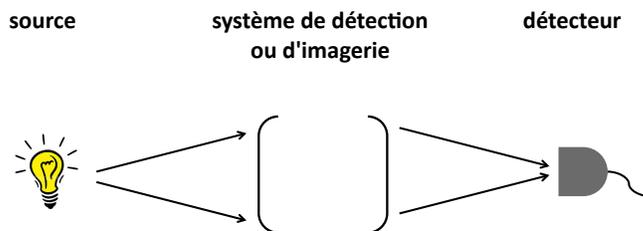


Figure 4.1: Schéma général d'un montage optique. La source peut être une source primaire (ampoule, étoile, flamme, molécule fluorescente) ou secondaire (objet éclairé diffusant, surface réfléchissante).

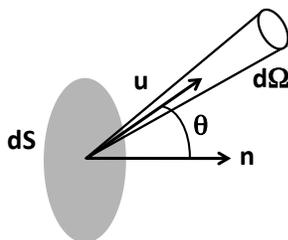


Figure 4.2: Notations utilisées pour la définition de la luminance. \mathbf{n} est la normale à l'élément de surface dS , et \mathbf{u} est le vecteur unitaire dans la direction d'observation.

à comprendre comme l'élément d'intégration par rapport à la variable \mathbf{u} (de même que dS est l'élément d'intégration par rapport à la variable \mathbf{r})¹.

La notion de luminance peut s'utiliser également pour caractériser le rayonnement traversant une surface (fictive ou réelle), comme dans le cas de la propagation de l'énergie dans l'espace libre ou le cas de la traversée d'une interface. Le flux $d\Phi$ est alors le flux traversant dS , mais l'écriture reste identique. Notons que ce flux est orienté, et compté positivement lorsque \mathbf{u} est dans le même sens que la normale \mathbf{n} (signe de $\cos \theta$).

4.1.2 Intensité d'une source

C'est la puissance émise par unité d'angle solide qui est importante (et pas seulement la puissance totale émise), et que l'on désigne par *intensité* (unité $\text{W}\cdot\text{sr}^{-1}$).

Source élémentaire: on a une intensité

$$dI = \frac{d\Phi}{d\Omega} = L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta dS$$

Source étendue : dans le cas d'une source spatialement incohérente, les intensités émises par les

¹Rappel : si \mathbf{u} est repéré en coordonnées sphériques par deux angles θ et ϕ , alors $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

différents points de la surface s'ajoutent. On a donc

$$I = \int_{source} L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta \, dS \quad (4.2)$$

4.1.3 Cas particulier : source Lambertienne

Une source dite *Lambertienne* est une source dont la luminance est isotrope. C'est le cas des sources thermiques usuelles, ou des surfaces générant de la lumière diffuse (par exemple verre fortement dépoli, couche de peinture). On a alors une intensité émise de la forme

$$I(\theta) = I_0 \cos \theta \quad \text{avec} \quad I_0 = \int_{source} L(\mathbf{r}) \, dS$$

La dépendance en $\cos \theta$ est une caractéristique de ces sources.

Flux émis dans un demi-espace par une source plane Lambertienne

Dans de nombreuses situations pratiques, on peut avoir à calculer le flux émis par une source plane Lambertienne (ou supposée comme telle en première approche).

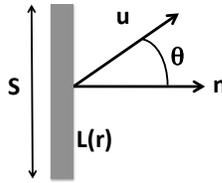


Figure 4.3: Emission par une source plane Lambertienne de luminance $L(\mathbf{r})$.

En utilisant les notations de la figure 4.3, le flux émis Φ (unité W) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{source} L(\mathbf{r}) \, dS \int_{2\pi \text{ ster}} \cos \theta \, d\Omega \\ &= I_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi I_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= \pi I_0 \end{aligned}$$

Si de plus la luminance est uniforme sur la surface, alors on a simplement $I_0 = L S$ et donc

$$\Phi = \pi L S \quad (4.3)$$

4.1.4 Eclairement

Du point de vue du *détecteur* (ou de l'écran), ce qui compte c'est l'éclairement $E = d\Phi/dS'$, où dS' est l'élément de surface du détecteur. En référence à la géométrie de la figure 4.4,

l'éclairement s'écrit :

$$E = \frac{L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta \, dS \, d\Omega}{dS'} \quad \text{avec} \quad d\Omega = \frac{dS' \cos \theta'}{r^2}$$

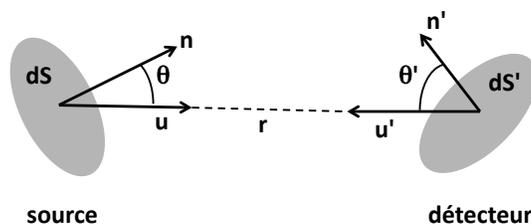


Figure 4.4: Flux échangé entre un élément dS d'une source et un élément dS' d'un détecteur. On note r la distance entre les deux éléments de surface.

L'angle solide $d\Omega$ à utiliser est en effet l'angle solide sous lequel est vu dS' depuis dS . Pour une source étendue (spatialement incohérente), l'éclairement total en un point \mathbf{r}' du détecteur (centre de dS') serait donné par

$$E = \int_{source} \frac{L(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \cos \theta \cos \theta'}{r^2} dS \quad (4.4)$$

Remarques

- On retrouve bien la loi en $1/r^2$ caractéristique de la propagation de l'énergie lumineuse émise par un point source.
- Le flux émis par dS et reçu par dS' peut s'écrire de deux manières différentes. Si on raisonne depuis la source (comme ci-dessus), on a $d\Phi = L \cos \theta \, dS \, d\Omega$ avec $d\Omega$ l'angle solide sous lequel est vu dS' depuis dS . Mais on peut aussi écrire $d\Phi = L \cos \theta' \, dS' \, d\Omega'$, ce qui revient raisonner depuis le détecteur, avec $d\Omega'$ l'angle solide sous lequel est vu dS depuis dS' , mais en gardant la même luminance (celle de la source). Cette réciprocité peut être utile dans les calculs impliquant une source et/ou un détecteur étendus, car l'une des deux approches peut amener à une intégrale plus simple que l'autre.
- L'éclairement est parfois appelé *irradiance* (c'est également l'appellation anglo-saxonne).

4.2 Conservation de la luminance

4.2.1 Relation générale

On s'intéresse au flux émis par un source plane de taille y , de luminance isotrope et uniforme, et transmis à un détecteur par un système optique, supposé stigmatique et aplanétique (voir figure 4.5).

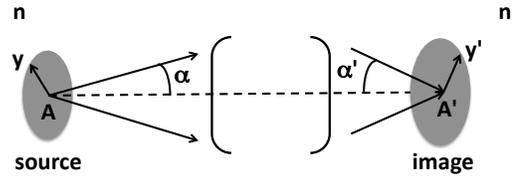


Figure 4.5: Image d'une source plane (supposée de luminance isotrope et uniforme) à travers un système optique. On note n et n' les indices des milieux incident et de détection, respectivement.

Le flux entrant dans l'instrument s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi &= L S \int_{\Omega} \cos \theta d\Omega \text{ avec } \Omega \text{ angle solide de collection} \\ &= 2\pi L S \int_0^{\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \pi L S \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

On a noté $S = \pi y^2$ la surface de la source. Notons également que si le milieu incident est d'indice $n = 1$, $\sin^2 \alpha$ est l'ouverture numérique de l'instrument.

Si l'on introduit le facteur de transmission global en énergie τ du système optique, alors le flux sortant du système est $\Phi' = \tau \Phi$. En introduisant la luminance L' dans le plan de l'image, on a aussi $\Phi' = \pi L' S' \sin^2 \alpha'$ avec $S' = \pi y'^2$ la taille de l'image de la source. La relation d'Abbe (voir chapitre 3) permet d'écrire $n y \sin \alpha = n' y' \sin \alpha'$, avec n et n' les indices des deux milieux. On en déduit donc :

$$\frac{L'}{n'^2} = \tau \frac{L}{n^2} \quad (4.5)$$

relation qui traduit la conservation de la luminance sous sa forme générale. Dans le cas fréquent où les milieux objet et image ont même indice $n = n'$, et pour des optiques de bonne qualité ($\tau \simeq 1$), on a une véritable égalité :

$$L' = L \quad (4.6)$$

On a donc conservation de la luminance, et ce quel que soit le grandissement du système optique.

4.2.2 Discussion

- Si on a conservation du flux et de la luminance, c'est qu'on a en fait conservation de l'*étendue géométrique* du faisceau, qui est définie comme $dU = dS \cos \theta d\Omega$. Notons que dans un milieu hétérogène, tout en restant dans les limites de l'optique géométrique, c'est L/n^2 qui se conserve, et donc $n^2 dU$ que l'on appelle *étendue optique*.
- Eclairage d'un détecteur
Le détecteur optique (ou tout système pour lequel on veut optimiser la collection de lumière) est défini par sa surface et son angle solide d'entrée. Avec une source de luminance uniforme et isotrope, la luminance de l'image ne dépend pas du grandissement. Pour optimiser le flux détecté, il suffit donc d'avoir la taille d'image nécessaire pour couvrir la surface et l'ouverture angulaire nécessaire pour couvrir l'angle solide d'entrée. On n'augmente pas la luminance en focalisant sur une image plus petite !

Avec une source de luminance non uniforme, on a intérêt à projeter l'image de la partie la plus brillante sur l'entrée du détecteur. Comme la luminance se conserve, le flux sera maximisé. Notons finalement qu'on a parfois intérêt à agrandir l'image tout en gardant un angle d'ouverture convenable. Il faut alors des optiques très ouvertes (et donc chères).

4.3 Unités photométriques

L'oeil est encore souvent le détecteur ultime en bout de chaîne optique. Un système d'unités adapté à la perception d'un observateur moyen lui est consacré, et est largement utilisé dans les applications traitant d'éclairage.

Candela : c'est en fait une des unités du système international (SI). Elle est définie comme l'intensité émise dans une direction donnée par une source monochromatique ($\lambda = 555$ nm) ayant une intensité énergétique de $1/683$ W.sr⁻¹. Une bougie émet environ 1 candela. Le choix d'une longueur d'onde vient du fait que le Candela est défini par rapport à une perception visuelle, et dépend donc *a priori* de la sensibilité de l'oeil. On choisit $\lambda = 555$ nm pour laquelle la sensibilité est maximum et une valeur numérique dans la définition correspondant à un observateur moyen.

Lumen : flux lumineux émis dans 1 steradian par une source de 1 candela. A une longueur d'onde $\lambda = 555$ nm, $1 \text{ lm} = 1/683 = 1,464.10^{-3}$ W.

Table 4.1: Unités utilisées en photométrie pour les applications d'éclairage et leur équivalent SI.

	Unités visuelles	Unités SI
Flux	Lumen (1 lm = 1 cd.sr)	W
Intensité	Candela	Candela (W.sr ⁻¹)
Luminance	Candela.m ⁻² (= nit)	W.m ⁻² .sr ⁻¹
Eclairement	Lumen.m ⁻² (= lux)	W.m ⁻²

Ordres de grandeur pour les lampes (par W électriques consommés)

Ampoule à incandescence : 15-25 lm.W⁻¹

Lampe fluorescente (tube néon) : 60-70 lm.W⁻¹

LED : 100-200 lm.W⁻¹.

4.4 Rayonnement de corps noir

4.4.1 Définition et réalisation

On appelle rayonnement de corps noir, ou rayonnement d'équilibre, le rayonnement qui règne dans une cavité à l'équilibre thermodynamique à une température T . Ce rayonnement est caractérisé par une luminance isotrope et uniforme, notée $L_{\omega}^0(T)$, qui *ne dépend que de la température T* . Ce fait expérimental est loin d'être évident (par exemple le rayonnement d'équilibre est indépendant du matériau dont est formée la cavité !). Une situation idéale

d'équilibre thermodynamique avec le rayonnement est schématisée sur la figure 4.6. L'intérieur de la cavité est baigné par un rayonnement de luminance $L_\omega^0(T)$. Si l'on perce un petit trou à travers la paroi de la cavité (figure de droite), alors la situation d'équilibre est peu perturbée et le rayonnement sortant est en bonne approximation caractérisé par une luminance d'équilibre $L_\omega^0(T)$. La surface du trou se comporte alors comme une source dite "corps noir" de température T (c'est-à-dire une source qui émet un rayonnement d'équilibre à la température T).

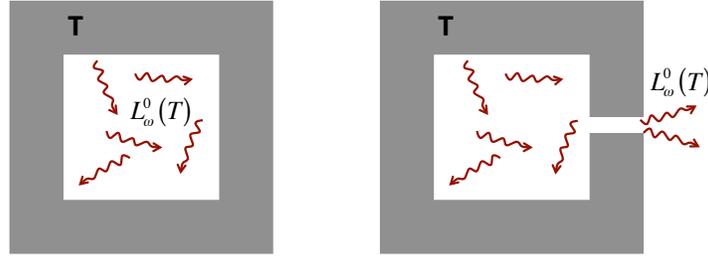


Figure 4.6: Gauche : situation d'équilibre thermique dans une cavité. Droite : source dite "corps noir" émettant avec une luminance $L_\omega^0(T)$.

La luminance par unité de fréquence du rayonnement de corps noir, que nous noterons $L_\omega^0(T)$ (unité $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{Hz}^{-1}$), est donnée par loi de Planck :

$$L_\omega^0(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (4.7)$$

avec k_B la constante de Boltzmann. On exprime parfois la loi de Planck à partir de la densité volumique d'énergie par unité de fréquence $U_\omega^0(T)$ (unité $\text{J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}$), qui est reliée à la luminance par $U_\omega^0(T) = 4\pi L_\omega^0(T)/c$. On a donc :

$$U_\omega^0(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (4.8)$$

Une démonstration de la loi de Planck est donnée dans l'Annexe C.

On préfère parfois définir la luminance par unité de longueur d'onde, moyennant l'égalité $L_\omega^0(T)d\omega = L_\lambda^0(T)d\lambda$, avec $\lambda = 2\pi c/\omega$. On a alors :

$$L_\lambda^0(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad (4.9)$$

4.4.2 Propriétés du rayonnement de corps noir

La luminance de Planck $L_\lambda^0(T)$ en fonction de la longueur d'onde λ est représentée sur la figure 4.7 pour différentes températures.

Les propriétés principales du rayonnement de corps noir sont les suivantes :

- Le rayonnement est caractérisé par une luminance isotrope et uniforme, qui ne dépend que de T .

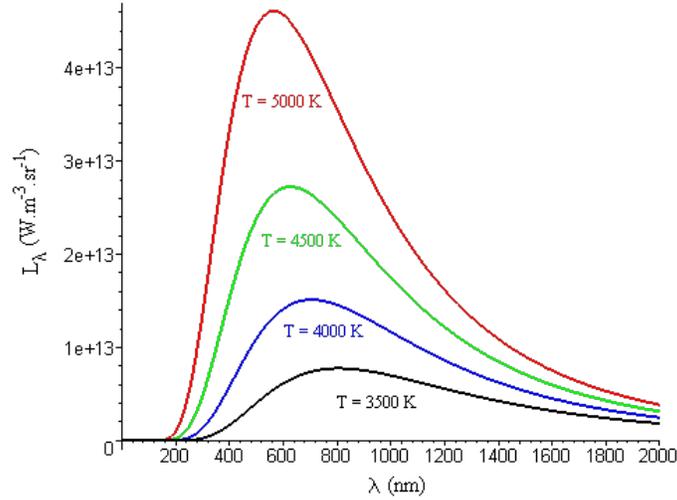


Figure 4.7: Luminance de Planck $L_{\lambda}^0(T)$ en fonction de la longueur d'onde λ pour différentes valeurs de la température T .

- A faibles températures ($k_B T \ll \hbar\omega$), on a

$$L_{\omega}^0(T) \simeq \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \exp(-\hbar\omega/k_B T)$$

qui est un cas limite montrant la coupure du spectre à haute fréquence que ne prédit pas la physique classique.

- La position en longueur d'onde du maximum λ_m de la fonction de Planck est donné par la loi du déplacement de Wien

$$\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K}$$

Par exemple pour $T = 300$ K, le maximum est obtenu pour $\lambda_m \simeq 10 \mu\text{m}$.

- La luminance totale du rayonnement de corps noir $L^0(T) = \int L_{\omega}^0(T) d\omega$ est donné par la loi de Stefan

$$L^0(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ la constante de Stefan. Le facteur π provient du fait que la constante de Stefan a été définie initialement pour le flux émis par une source corps noir plane de surface S , qui s'écrit simplement $\Phi = \pi L^0(T) S = \sigma T^4 S$.

- Deux courbes de $L_{\omega}^0(T)$, ou $L_{\lambda}^0(T)$, correspondant à deux températures différentes ne se croisent pas. Il y a donc d'autant plus d'énergie dans le rayonnement que T est grande, quelle que soit la fréquence.

Références

- [1] J.L Meyzonnette et T. Lépine, *Bases de Radiométrie Optique* (Editions Cépaduès, Toulouse, 2001).

[2] E. Hecht, *Optics* (McGraw Hill, New York, 1975).

Chapitre 5

Détecteurs, signaux et bruits

Objectifs

- Introduire les grandeurs nécessaires à la caractérisation des bruits de mesure.
- Présenter le cas particulier du bruit de photons.
- Présenter dans les grandes lignes les différents types de photodétecteurs.

La plupart des détecteurs optiques convertissent la puissance lumineuse en un signal électrique qui est ensuite exploité. Il existe des détecteurs uniques (ex : photomultiplicateur) ou multiples qui intègrent un grand nombre de détecteurs élémentaires (ex : matrice de capteurs CCD, pouvant comporter plusieurs millions de capteurs). Afin d'optimiser un montage, ou de choisir un matériel adapté, il est important de connaître les définitions et les notions élémentaires permettant de caractériser un niveau de bruit ou un rapport signal à bruit. Il est également important d'avoir une idée générale des grandes familles de détecteurs.

5.1 Signaux photoélectriques

5.1.1 Signal issu d'un photodétecteur

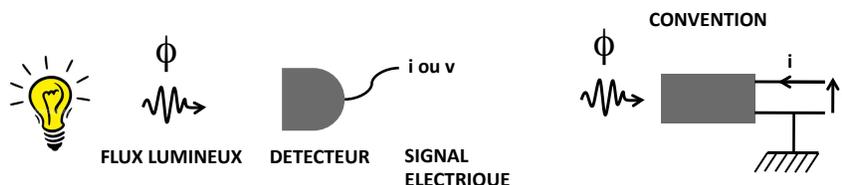


Figure 5.1: Représentation schématique d'un processus de photodétection. La figure de droite donne la convention utilisée pour le schéma électrique équivalent.

Un processus de photodétection est représentée schématiquement sur la figure 5.1. Le signal mesuré est en général un signal électrique (courant ou tension). Très souvent en optique on

travaille avec des signaux “faibles”, c’est-à-dire que les relations entre i (courant électrique), v (tension électrique) et ϕ (flux lumineux incident) sont linéarisées autour d’un point de fonctionnement (i_0, v_0, ϕ_0) . Pourquoi a-t-on souvent des signaux faibles ? Parce qu’on ne dispose que de très peu de lumière incidente (ex : astronomie, microscopie de fluorescence, lumière diffuse ayant traversé un échantillon épais) ou parce qu’on mesure des petites variations d’un signal fort (ex : mesure de déplacements en interférométrie).

5.1.2 Modélisation électrique du photodétecteur

Signaux stationnaires

Dans le cas d’un signal indépendant du temps, et dans le régime de réponse linéaire du détecteur, on peut écrire une variation de courant autour du point de fonctionnement (i_0, v_0, ϕ_0) sous la forme :

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial \phi} \right)_v d\phi + \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)_\phi dv \quad (5.1)$$

On appelle $S_v = (\partial i / \partial \phi)_v$ la *sensibilité* à tension constante, et $A = (\partial i / \partial v)_\phi$ l’admittance du détecteur ($A = 0$ si le détecteur se comporte comme une source de courant idéale).

On peut écrire également :

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial \phi} \right)_i d\phi + \left(\frac{\partial v}{\partial i} \right)_\phi di \quad (5.2)$$

On appelle $S_i = (\partial v / \partial \phi)_i$ la *sensibilité* à courant constant, et $Z = (\partial v / \partial i)_\phi$ l’impédance du détecteur ($Z = 0$ si le détecteur se comporte comme une source de tension idéale). Ces relations permettent de déterminer le circuit équivalent du détecteur (source de courant ou de tension avec admittance ou impédance). Notons bien qu’il s’agit du circuit modélisant le détecteur sans charge en aval (détecteur seul).

Signaux instationnaires

On peut avoir à détecter des signaux qui varient rapidement dans le temps (ex : impulsions produites par des lasers, intensités modulées dans le temps). On a alors les mêmes relations, mais écrites dans le domaine fréquentiel. Les impédances deviennent alors des grandeurs complexes, et le détecteur se comporte comme un *filtre* dont on peut définir la *bande passante* Δf ou le *temps de réponse* $\tau \simeq 1/\Delta f$.

Si le filtre est du premier ordre (le circuit équivalent est par exemple un générateur de courant avec résistance R et capacité C en parallèle), on a $\tau = RC$. Si le filtre est plus complexe, les définitions de τ et de Δf ne sont pas aussi simples. Ce sont alors en général des données du constructeur (ou des données que l’on déduit des courbes représentant les fonctions de transfert).

Cas particulier : signaux stationnaires forts

Il existe des situations de photodétection pour lesquelles l’hypothèse de signal faible (avec linéarisation autour d’un point de fonctionnement) n’est pas valable. C’est le cas par exemple lors de l’utilisation d’une photodiode pour détecter le passage d’individus.

Pour caractériser le fonctionnement du détecteur dans ce régime, on utilise un ensemble de caractéristiques statiques $i = f(v)$ correspondant à différentes valeurs de ϕ . L’exemple de la

photodiode est représenté sur la figure 5.2. On a un comportement très non linéaire, qui est utile par exemple pour un système “on-off”. Les sensibilités $\Delta i/\Delta\phi$, ou $\Delta v/\Delta\phi$ ne sont pas constantes, il est donc important de bien choisir le point de fonctionnement.

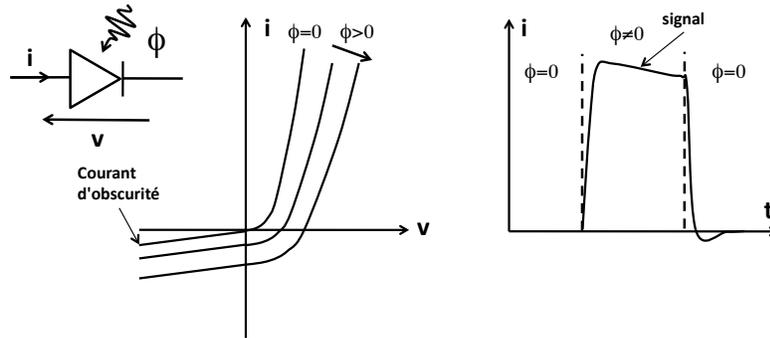


Figure 5.2: Gauche : Caractéristiques tension-courant d’une photodiode en régime stationnaire, pour différents niveau de flux lumineux incident. Droite : exemple de réponse dans le cas d’un capteur de passage. On observe un retard (“trainage”) du signal lors des transition “on-off”.

5.2 Caractérisation du bruit

5.2.1 Signal et bruit. Définition statistique

L’observation d’un signal stationnaire au cours du temps fait apparaître des fluctuations (même avec un détecteur sans défauts), comme illustré sur la figure 5.3.

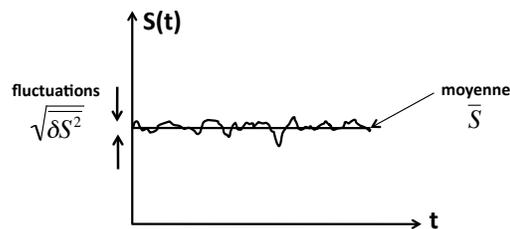


Figure 5.3: Représentation du bruit sur un signal stationnaire. L’amplitude du bruit est mesurée par l’écart-type des fluctuations.

Le bruit correspond aux fluctuations temporelles du signal, et est décrit statistiquement. On peut alors définir la *valeur moyenne* temporelle telle que

$$\bar{S}(t_0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} S(t) dt \quad (5.3)$$

En pratique, on a un temps d’intégration T fini, la moyenne étant d’autant mieux définie que T est grand. C’est cette valeur moyenne que l’on définit comme le signal à mesurer. Si

$S(t)$ est statistiquement stationnaire, alors la valeur moyenne est indépendante de t_0 (on la note alors simplement \bar{S}). On a donc

$$S(t) = \bar{S} + \delta S(t) \quad (5.4)$$

où $\delta S(t)$ représente la partie fluctuante (le bruit). Le bruit est de moyenne nulle ($\overline{\delta S(t)} = 0$ par définition de $\delta S(t)$ dans l'Eq. 5.4). Pour caractériser l'amplitude du bruit, on utilise l'écart quadratique moyen (variance), que l'on notera $(\Delta S)^2$:

$$(\Delta S)^2 = \overline{\delta S^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} [\delta S(t)]^2 dt \quad (5.5)$$

La racine carrée de la variance ΔS , que l'on appelle écart-type, a la même unité que le signal. C'est l'écart-type que l'on prend comme mesure de l'amplitude du bruit. On appelle alors *rapport signal à bruit* la quantité $\bar{S}/\Delta S$ (souvent noté SNR pour "signal-to-noise ratio" dans la littérature anglo-saxonne)

5.2.2 Caractérisation spectrale

Si le bruit est statistiquement stationnaire, il est à puissance finie, mais pas à énergie finie (en effet, la fonction $S(t)$ ne décroît pas à l'infini, et n'est donc pas de carré sommable). Pour analyser le contenu spectral d'un tel signal, on utilise la *densité spectrale de puissance*, que nous avons déjà rencontrée au chapitre 1.

On définit le signal $S_T(t)$ tronqué tel que $S_T(t) = S(t)$ si $t \in [-T/2, T/2]$, et $S_T(t) = 0$ sinon. Sa transformée de Fourier, qui est bien définie, s'écrit :

$$S_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_T(t) \exp(i\omega t) dt \quad (5.6)$$

où l'on a utilisé la pulsation $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence. On s'attend à avoir un pic de Dirac en $\omega = 0$ (pour un signal stationnaire), ou des pics en $p\omega_0$, avec p entier, dans le cas d'un signal modulé à une pulsation ω_0 , sur lesquels se superpose une distribution continue provenant du bruit. La *densité spectrale de puissance* du bruit, que l'on notera $\overline{\delta S^2}/d\omega$, est définie par :

$$\frac{\overline{\delta S^2}}{d\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\overline{\delta S_T(\omega)}|^2}{T} \quad (5.7)$$

Physiquement, le produit $(\overline{\delta S^2}/d\omega) \delta\omega$ est la puissance du bruit dans la bande spectrale $[\omega, \omega + \delta\omega]$ (attention ici il s'agit d'une pulsation, ou d'une fréquence, associée à la dynamique temporelle du bruit, et pas de la pulsation optique !)

Remarque sur les unités

Si $S(t)$ est en W ou en A (courant électrique), alors $\overline{\delta S^2}/d\omega$ est en $W^2 \cdot Hz^{-1}$ ou en $A^2 \cdot Hz^{-1}$. La racine carrée, que l'on utilise pour caractériser l'amplitude du bruit, est alors en $W \cdot Hz^{-1/2}$ ou en $A \cdot Hz^{-1/2}$ (unités rencontrées fréquemment, qui peuvent sembler curieuses, mais qui reflètent simplement le fait que l'on manipule des densités spectrales de puissance).

5.2.3 Filtrage du bruit

Afin de filtrer le bruit, on utilise un filtre passe-bas dans le cas d'un signal stationnaire, ou un filtre passe-bande dans le cas d'un signal modulé (voir figure 5.4). Pour une modulation de fréquence ω_0 , on peut extraire la partie modulée du signal à la même fréquence (ou à des fréquences harmoniques). On effectue une telle opération de filtrage passe-bande à l'aide d'une détection synchrone.

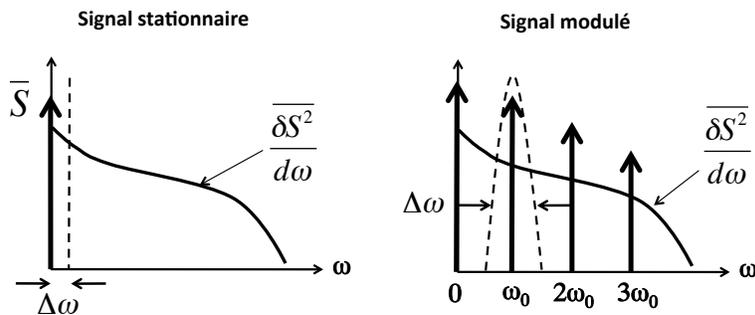


Figure 5.4: Représentation schématique d'une opération de filtrage d'un signal stationnaire à l'aide d'un filtre passe-bas (gauche), et d'un signal modulé à l'aide d'un filtre passe-bande centré ici sur la première harmonique (droite).

Si l'on note $\Delta\omega$ la largeur de bande de l'instrument de mesure utilisé (même sans filtre additionnel, le détecteur lui-même impose une bande passante finie), la variance du bruit résiduel sera donnée par :

$$\overline{\Delta S^2} = \frac{\overline{\delta S^2}}{d\omega} \Delta\omega \quad (5.8)$$

Il faut donc réduire $\Delta\omega$ pour réduire le niveau de bruit sans toucher au signal. Notons bien que réduire $\Delta\omega$ revient à augmenter le temps de mesure τ ($\tau \simeq 2\pi/\Delta\omega$). Dans certaines applications, le temps de mesure ne peut cependant pas être augmenté arbitrairement (ex : lecteur CD ou DVD).

5.3 Le bruit : origine physique et modélisation

5.3.1 Origine microscopique

Prenons comme signal le courant électrique i délivré par le photodétecteur. Avec une électronique ultra-rapide, on pourrait mesurer le passage des électrons un par un. Il faudrait un temps de réponse τ petit devant e/i où e est la charge de l'électron (pour $i = 1$ nA, il faudrait $\tau \simeq 10^{-11}$ s, ce qui est à la limite de ce qui est aujourd'hui possible). Dans ce cas, les fluctuations du signal seraient dues uniquement aux fluctuations de l'intervalles de temps entre le passage de deux électrons successifs. Ces fluctuations sont l'origine microscopique du bruit.

Plus le temps de réponse (ou temps d'intégration) du détecteur augmente, ou de manière équivalente plus la bande passante de détection diminue, plus le signal sera filtré. Mathématiquement,

cela revient à convoluer la suite de pics représentée sur la figure 5.5 par une fonction de largeur τ de plus en plus grande, ce qui revient à “lisser” le bruit. Ce mécanisme permet de comprendre intuitivement pourquoi la bande passante de détection influe directement sur le niveau de bruit.

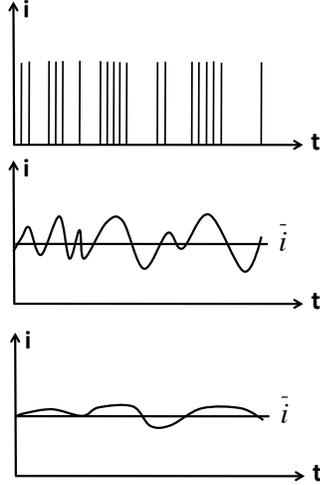


Figure 5.5: Haut : signal électrique microscopique, correspondant au passage des électrons individuels. Milieu : Signal vu par un détecteur ayant une bande passante $\Delta\omega \simeq 1/T$ où T est l’intervalle de temps moyen séparant deux électrons successifs. Bas : signal vu par un détecteur ayant une bande passante $\Delta\omega' \ll \Delta\omega$.

5.3.2 Bruit de photons

La nature quantique du processus de photodétection (conversion d’un photon en un électron) a une conséquence directe sur la distribution statistique du nombre de photoélectrons détectés sur un intervalle de temps donné. Cette distribution est une loi de Poisson.

Plus précisément, la probabilité de mesurer m photoélectrons sur un intervalle de temps τ est :

$$P_m(\tau) = \frac{M^m}{m!} \exp(-M) \quad (5.9)$$

où $M = \bar{m}$ est le nombre *moyen* de photoélectrons détectés sur l’intervalle de temps τ . Une propriété importante de la loi de Poisson est que l’écart-type de la distribution est donné par :

$$\Delta m = \sqrt{m^2 - \bar{m}^2} = \sqrt{M} \quad (5.10)$$

Exemple : si un capteur CCD peut accumuler 10^4 photoélectrons pendant le temps de mesure (par exemple 40 ms), alors l’incertitude sur le nombre de photoélectrons est 10^2 .

Cette loi est démontrée dans l’annexe D en utilisant une approche semi-classique due à Mandel (1959). Dans ce modèle, c’est la conversion lumière-électron qui est un processus discret (quantifié) et qui conduit à l’apparition du bruit. On parle de “bruit de grenaille” (“shot noise” en anglais). Dans la théorie quantique de la photodétection, due à Glauber (1963), c’est la lumière incidente qui est quantifiée (photons) et c’est directement la statistique d’arrivée des photons qui

est une loi de Poisson. On parle alors de “bruit de photons”. Ces deux approches (semi-classique et quantique) sont deux visions du même phénomène. Les dénominations “bruit de photons” ou “bruit de grenaille” désignent donc le même bruit.

5.3.3 Densité spectrale du bruit de photons

Un flux optique ϕ (unité W) incident sur le détecteur correspond à un flux de photons $F = \phi/(\hbar\omega_{opt})$, avec ω_{opt} la fréquence optique (à ne pas confondre avec la fréquence ω qui caractérise dans ce chapitre la dynamique du détecteur). Sur un intervalle de temps infinitésimal dt , on détecte $m = Fdt$ photons. Le temps d’intégration est relié à la bande passante du détecteur (ou plus globalement de la chaîne de détection complète). Par convention, on considère que le filtre qui impose la bande passante est du second ordre, de telle sorte que $dt = 1/(2\delta f) = \pi/\delta\omega$. On a donc $F = 2m\delta f$.

Pour passer à l’intensité du courant électrique (signal délivré par le photodétecteur), on écrit simplement $i = Fe$, où e est la charge de l’électron (ou du trou selon le type de porteurs mis en jeu). L’intensité moyenne est simplement $\bar{i} = \bar{F}e = 2e\bar{m}\delta f$. La variance de l’intensité s’écrit :

$$\begin{aligned} (\Delta i)^2 &= \bar{i}^2 - \bar{i}^2 \\ &= 4e^2\bar{m}^2(\delta f)^2 - 4e^2\bar{m}^2(\delta f)^2 \\ &= 4e^2\bar{m}(\delta f)^2 \\ &= 2e\bar{i}\delta f \end{aligned}$$

Dans la troisième égalité, on a utilisé le fait que la variance du nombre de photons est $(\Delta m)^2 = \bar{m}$ (loi de Poisson). La densité spectrale du bruit de photons se déduit de $(\Delta i)^2 = (\delta i^2/df)\delta f$. On obtient :

$$\frac{\overline{\delta i^2}}{df} = 2e\bar{i} \quad (5.11)$$

Remarques :

- Le bruit de photons est un bruit blanc (sa densité spectrale ne dépend pas de la fréquence).
- Si le rendement quantique du détecteur, noté η , est différent de 1, alors on a $\bar{i} = \eta\bar{F}e$. La statistique de Poisson reste applicable aux photoélectrons et le résultat ci-dessus reste inchangé.
- Si on ajoute à la chaîne de détection un amplificateur de courant de gain G (sans bruit additionnel), le courant i est multiplié par G et $(\Delta i)^2$ par G^2 . Mais le rapport signal à bruit $\bar{i}/\Delta i$ est inchangé.

5.3.4 Bruit thermique

Le bruit thermique se manifeste par exemple lorsque l’on observe la tension aux bornes d’une résistance, ou le courant qui la traverse. Sous l’effet de l’agitation thermique, les charges libres dans la résistance sont animés d’un mouvement aléatoire qui engendre un courant i et une

tension v fluctuants (on parle de bruit Johnson de la résistance). On a bien sûr $\bar{i} = 0$ et $\bar{v} = 0$, mais $\Delta i \neq 0$ et $\Delta v \neq 0$. On montre alors que (admis) :

$$(\Delta i)^2 = \frac{4k_B T}{R} \delta f \quad \text{et} \quad (\Delta v)^2 = 4k_B T R \delta f \quad (5.12)$$

avec k_B la constante de Boltzmann et T la température. Ce résultat est une manifestation du théorème fluctuations-dissipation (la résistance R traduit la dissipation d'énergie dans le matériau).

On notera que le bruit thermique est également un bruit blanc. Les densités spectrales pour le courant et la tension sont $\overline{\delta i^2}/df = 4k_B T/R$ et $\overline{\delta v^2}/df = 4k_B T R$.

Remarques : un détecteur fonctionnant dans l'infrarouge thermique ($\hbar\omega_{opt} \simeq k_B T$) peut donner lieu à une autre bruit d'origine thermique, provenant des photons infrarouges ambiant émis par l'environnement (fond ambiant thermique). C'est parfois la principale cause de bruit dans ce type de détection, que l'on appelle BLIP (Background Limited Infrared Power). On peut extraire le signal de ce bruit en modulant la lumière utile à une fréquence bien définie.

5.3.5 Bruits technologiques

Ce sont d'autres bruits qui proviennent des imperfections des systèmes réels (exemple : variations locales des propriétés des matériaux). Ce ne sont pas en général des bruits blancs, mais leur densité spectrale décroît avec la fréquence. De nombreux bruits sont modélisables par des densités spectrales en $1/f$ (on parle de bruits "roses").

5.3.6 Addition des bruits

En présence de différentes sources de bruit, on peut se demander comment évaluer l'ordre de grandeur de l'amplitude du bruit total résultant. Si deux sources de bruit produisant des intensités $i_1 = \bar{i}_1 + \delta i_1$ et $i_2 = \bar{i}_2 + \delta i_2$ s'ajoutent, alors la variance de l'intensité résultante $i = i_1 + i_2$ s'écrit :

$$(\Delta i)^2 = (\Delta i_1)^2 + (\Delta i_2)^2 + 2\overline{\delta i_1 \delta i_2} \quad (5.13)$$

Le dernier terme est nul lorsque les deux bruits sont décorélés (ce qui est souvent le cas). On retiendra donc que pour des bruit décorélés, ce sont les variances, et donc les densités spectrales, qui s'ajoutent.

Exemple : en présence de bruit de photons et de bruit thermique, la densité spectrale du bruit total est

$$\frac{\overline{\delta i^2}}{df} = 2e\bar{i} + \frac{4k_B T}{R} = 2e \left(\bar{i} + \frac{2k_B T}{eR} \right) \quad (5.14)$$

Si le courant moyen mesuré \bar{i} est supérieur à $2k_B T/(eR)$, alors c'est le bruit de photons qui domine (et *vice versa*).

5.3.7 Grandeurs utilisées en pratique

Quelle que soit l'origine du bruit, celui-ci va limiter le plus petit signal qu'un détecteur pourra mesurer (et donc la sensibilité du processus de détection). Il est donc pratique d'utiliser une grandeur pour mesurer le bruit qui permette de déterminer le plus directement possible cette limite. Différentes grandeurs sont utilisées (notamment dans les catalogues et les documentations techniques des fabricants) :

- *NEP* (Noise Equivalent Power) : c'est le signal équivalent au niveau de bruit (mesuré par la racine carré de la densité spectrale de puissance de bruit), donné en $\text{W}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$.
- Détektivité D : c'est l'inverse du *NEP*, donnée en $\text{Hz}^{1/2}\cdot\text{W}^{-1}$.
- Pour comparer entre eux deux détecteurs, on peut vouloir une détektivité dite "spécifique" $D^* = D \times \sqrt{A}$ donnée en $\text{cm}\cdot\text{Hz}^{1/2}\cdot\text{W}^{-1}$, où A est la surface du détecteur. Cette détektivité spécifique normalise l'effet de changement de surface de détection entre les deux détecteurs.
- Pour un détecteur infrarouge sensible au bruit généré par le fond thermique ambiant, on souhaite de plus normaliser par l'angle solide de détection. On utilise $D^{**} = D^* \sin \theta$ donné en $\text{cm}\cdot\text{ster}^{1/2}\cdot\text{Hz}^{1/2}\cdot\text{W}^{-1}$ (on rappelle que pour un angle d'ouverture θ , le flux reçu varie comme $\sin^2 \theta$).

5.4 Les grandes classes de photodétecteurs

Nous distinguerons les détecteurs thermiques pour lesquels le signal est lié à l'élévation de température induite par le rayonnement des détecteurs quantiques qui sont basés sur l'effet photo-électrique externe (éjection d'un électron dans le vide ou dans un gaz) ou interne (création de paires électron-trou dans un semiconducteur).

5.4.1 Détecteurs thermiques

L'avantage essentiel de ces détecteurs est que, si l'élément récepteur peut être considéré comme un corps noir, ils pourront répondre dans une très large gamme de longueur d'onde avec une sensibilité (en V/W ou A/W) constante. Sauf pour quelques cas particuliers (systèmes miniaturisés, fonctionnant à très basse température) ces détecteurs sont relativement lents à cause des échanges de chaleur mis en jeu. On distingue différentes classes de détecteurs thermiques.

Les bolomètres

Ces détecteurs utilisent des matériaux dont la résistance varie avec la température. La dépendance en température doit être aussi grande que possible pour que ces détecteurs soient sensibles. On peut citer en particulier :

- Les semiconducteurs (thermistors) dont la résistance est une fonction décroissante de T (souvent des oxydes de Mn, Co, Ni ou du G dopé au Ga).

- Les métaux (généralement sous forme de films minces, platine, argent, nickel) dont la résistance est une fonction croissante de T .
- Les supraconducteurs dont la résistance peut varier de plusieurs ordres de grandeur pour 1 K au voisinage de la transition métal normal supraconducteur (Al, NbN, Ta, YBaCuO7).

Les détecteurs Pyroélectriques

L'effet pyroélectrique est présent dans des cristaux isolants ne possédant pas de centre de symétrie (ces matériaux sont aussi piézoélectriques et ferroélectriques, ils sont utilisés également pour leur propriétés électro-optiques et non linéaires). Dans de tels systèmes, le moment dipolaire électrique (ou la position moyenne des électrons par rapport au réseau) varie avec la température.

Plus précisément on écrit $dQ = P A dT$ où dQ est la variation de la charge qui apparaît sur une lame à faces parallèles d'aire A soumise à une variation de température dT , et P est le coefficient pyroélectrique qui est de l'ordre de 1 à 10 Coulomb.m⁻².K⁻¹. La différence de potentiel aux bornes de la lame est alors $dV = dQ/C = (P a/\epsilon_r) dT$, où $C = \epsilon_r S/a$ est la capacité de la lame, ϵ_r étant la constante diélectrique (permittivité diélectrique relative) et a son épaisseur.

Le sulfate de glycolle (ou triglycine sulphate TGS) est très utilisé comme matériaux pour ces détecteurs. Comme pour les détecteurs piézoélectriques ou les microphones ces systèmes capacitifs imposent l'usage d'amplificateurs/adaptateurs d'impédances (type FET) dont les performances (bruits de résistances) limitent la détectivité des systèmes pyroélectriques. Ces détecteurs sont très largement utilisés dans l'infrarouge car ils présentent un bon rapport performances/prix (sensibilité $\simeq 10^4$ V/W et $D^* \simeq 10^7$ m.Hz^{1/2}.W⁻¹).

Les thermophiles

L'élévation de température de la partie chauffée ("noire") est faite ici avec un thermocouple. Habituellement une seconde soudure, à l'abri du rayonnement, permet la compensation des fluctuations de la température ambiante. Dans les meilleurs cas (surface sensible : feuille d'or noircie de surface <1 mm² et placée sous vide) la sensibilité est de l'ordre de quelques dizaines de V/W et $D^* \geq 10^7$ m.Hz^{1/2}.W⁻¹.

Détecteurs pneumatiques

Pour ce type de détecteurs on cherche à suivre la déformation d'une membrane induite par la variation de pression de gaz, elle-même induite par l'absorption de l'énergie lumineuse sur une paroi très fine (donc de faible masse spécifique). La mesure de la déformation de la membrane peut se faire de façon électrique comme dans un microphone (variation de capacité) ou par une méthode optique (interférométrique, comme nous le verrons dans l'exemple qui sera traité plus loin, ou non). On obtient $D^* \simeq 10^7$ m.Hz^{1/2}.W⁻¹.

Aujourd'hui démodés ces détecteurs ont longtemps été parmi les meilleurs systèmes fonctionnant à température ambiante. Il faut noter que ces systèmes, lorsque la membrane absorbante

est remplacée par un gaz absorbant, permettent de fabriquer des détecteurs de gaz dits “photoacoustiques” d’une très grande sensibilité (par exemple quelques ppT d’éthylène dans l’air en utilisant un laser IR à une longueur d’onde associée à un mode de vibration-rotation de la molécule).

5.4.2 Détecteurs quantiques

Rappelons que ces détecteurs sont basés sur l’effet photoélectrique (interaction photon-électron) qui est un effet “instantané”. Leur rapidité sera donc liée aux méthodes de détection utilisées.

A la différence des détecteurs thermiques, chaque détecteur couvrira un domaine spectral limité :

- Vers les basses énergies des photons, il y a une valeur seuil à partir de laquelle l’effet ne se produit plus.
- Vers les hautes énergies, un photon créé en principe un porteur de charge (ou une paire électron-trou) mais des raisons souvent technologiques limiteront l’efficacité du détecteur.

Aujourd’hui l’ensemble des détecteurs disponibles couvre un très large domaine spectral allant de l’UV à l’IR lointain.

Détecteurs photoconducteurs

Dans un semiconducteur intrinsèque (non dopé) à basse température tous les électrons participent aux liaisons de l’édifice cristallin et sont dans des orbitales liantes. On dit qu’ils occupent la “bande de valence” (BV). Comme il n’y a aucun électron libre pour participer à la conduction électrique, on dit que la “bande de conduction” (BC) est vide. Un tel matériau est un isolant. En absorbant un photon d’énergie suffisante, un électron peut passer (au sens d’une transition quantique) de l’orbitale liante à une orbitale antiliante. Dans un cristal semiconducteur le recouvrement des orbitales antiliantes donne aux électrons une certaine mobilité électrique (et au trou, c’est à dire à l’absence d’électrons, également) dans la BC. L’image que l’on donne souvent pour le mécanisme de conduction est celle d’un parking bloqué lorsqu’il est entièrement rempli de voitures, et débloqué par la présence de trous dans la distribution des voitures.

L’écart entre l’énergie des électrons dans la BV et dans la BC, que l’on appelle bande interdite (ou gap) et que l’on note E_g , représente le seuil de cet effet photoélectrique interne. En réalité, à température finie, l’équilibre de Boltzman impose des rapports de population entre BC et BV en $\exp(-E_g/k_B T)$ qui peuvent induire (si E_g n’est pas trop grande devant $k_B T$) une conductivité électrique initiale avant l’action du rayonnement du fait que la BC est légèrement peuplée (c’est pour cette raison qu’un semiconducteur n’est pas strictement un isolant). Donnons à titre d’exemple quelques longueurs d’onde $\lambda_g = hc/E_g$ associées à l’énergie de gap : $\lambda_g = 0,5 \mu\text{m}$ pour CdS, $1,1 \mu\text{m}$ pour Si, $1,8 \mu\text{m}$ pour Ge, $5,4 \mu\text{m}$ pour InSb et $12 \mu\text{m}$ pour l’alliage ternaire HgCdTe (de composition $\text{Hg}_0,8\text{Cd}_0,2\text{Te}$).

On peut élargir la gamme spectrale accessible vers l’IR lointain (grandes longueurs d’onde) en dopant les semiconducteurs. La bande interdite n’est plus vide mais on y trouve des états

localisés. Dans ce cas les transitions se font selon la nature du dopage (p ou n) d'un état donneur vers la bande de conduction ou de la bande de valence vers un état accepteur. Le Germanium dopé avec Au permet d'opérer à partir de $8 \mu\text{m}$, avec Cu à partir de $30 \mu\text{m}$ et avec B à partir de $130 \mu\text{m}$.

Détecteurs photovoltaïques

Ce sont des jonctions PN (ou parfois PIN car on ajoute une zone intrinsèque pour accroître la taille de la zone de déplétion où règne le champ électrique interne), donc des diodes dont le champ interne va séparer les porteurs photocréés de charges opposées (électrons et trous). Une tension va donc apparatre aux bornes, même en l'absence de polarisation extérieure (c'est de cette capacité à fournir une tension sous illumination que vient le terme photovoltaïque). Sous illumination, la caractéristique de diode classique dans l'obscurité se trouve déplacée (translatée parallèlement à l'axe du courant) d'une valeur égale au courant photocréé. Les montages typiques photovoltaïques (PV) sans polarisation, ou photoconducteurs ou photorésistif (PC) avec polarisation sont utilisés pour des illuminations faibles (PV) ou fortes (PC) à cause des non linéarités des caractéristiques.

Parmi les détecteurs les plus courants on trouve : GaAs avec $\lambda_g = 0,8 \mu\text{m}$, Si avec $\lambda_g = 1,1 \mu\text{m}$, Ge avec $\lambda_g = 1,8 \mu\text{m}$, InGaAs avec $\lambda_g = 1,8 \mu\text{m}$, InAs avec $\lambda_g = 3,4 \mu\text{m}$, et InSb avec $\lambda_g = 5,8 \mu\text{m}$.

Intégration des détecteurs : Barettes ou Matrices

Les détecteurs qui sont fabriqués à partir de semiconducteurs se prêtent (en particulier dans le cas du silicium) à l'intégration d'un grand nombre de détecteurs élémentaires sous forme de barettes linéaires (jusqu'à 10^4 détecteurs) ou de matrices (plus de 10^7 détecteurs).

Le problème est alors la gestion des signaux fournis par chacun des détecteurs élémentaires. En général (systèmes CCD par exemple) le photocourant des diodes charge (ou décharge) des capacités (la capacité que constitue la jonction elle-même par exemple) ; un système de transistors adressables ou de transfert de charge (de type registre à décalage) vient ensuite lire la valeur de cette charge. La suite de ces signaux élémentaires engendre, par exemple, le signal vidéo des appareils photo numériques.

Le fait de pouvoir utiliser un nombre aussi important de détecteurs a ouvert la voie à différentes méthodes de traitement optique du signal massivement parallèles. Le gain en temps, ou en rapport signal/bruit à temps de mesure constant est, bien sûr, considérable (10^6 et 10^3 avec 10^6 détecteurs par rapport à un seul détecteur et une méthode de balayage).

Détecteurs photoémisifs

Ce sont les détecteurs qui mettent en jeu l'effet photoélectrique classique (externe) dans lequel des électrons sont éjectés de la photocathode soumise à un rayonnement lumineux. On trouve trois types de détecteurs : cellules à vide, cellules à gaz et photomultiplicateurs, mais aujourd'hui

seuls les photomultiplicateurs sont très répandus à cause de l'amplification considérable (10^5 à 10^6) qu'ils offrent.

- Cellule à vide.
La géométrie permet une très bonne collection des électrons émis par la cathode qui est souvent une couche mince métallique ou semiconductrice.
- Cellule à gaz.
Grâce à l'ionisation par choc du gaz rare (par exemple argon) qui se produit dès que les électrons sont suffisamment accélérés, il y a multiplication (par 10 environ) du courant.
- Photomultiplicateurs.
Ils utilisent l'émission secondaire. La différence de potentiel entre la cathode et une électrode (appelée "dynode") peut fournir une énergie cinétique suffisante aux électrons de la dynode pour qu'elle émette n électrons (par exemple $1 < n < 10$ selon la tension appliquée pour l'alliage AgMg oxydé). En plaçant plusieurs dynodes en cascade (typiquement une dizaine d'étages ou plus) avant d'atteindre l'anode le courant de cathode sera considérablement augmenté. L'optimum de fonctionnement correspond à un facteur multiplicatif commun entre 2 et 3 par étage qui donnerait un gain compris entre $1,6 \cdot 10^4$ et $4,8 \cdot 10^6$ avec 14 étages de facteurs multiplicatifs égaux.

Les photomultiplicateurs, en plus de ce gain précieux, sont rapides (temps de réponse $\tau \simeq 10^{-9}$ à 10^{-10} s, ce qui revient à avoir un amplificateur de gain $\simeq 10^6$ et présentant une bande passante de quelques GHz !). Ils ont un bruit propre relativement faible (quelques électrons/s) qui permet de rentrer en mode dit de "comptage de photons". Ils sont malheureusement limités au seul domaine UV, visible et très proche IR ($1 \mu\text{m}$).

Assez récemment, les photodiodes dite "à avalanche", qui en quelque sorte combinent le principe de la détection photovoltaïque et de la multiplication, sont apparues comme des photodétecteurs rivalisant avec les photomultiplicateurs. Elles sont aujourd'hui très utilisées dans le régime de comptage de photons.

Chapitre 6

Propagation et diffraction

Objectifs

- Introduire le développement en ondes planes (ou spectre angulaire) comme outil fondamental pour décrire la propagation en milieu homogène et la diffraction.
- Discuter physiquement de l'origine de la diffraction.
- Retrouver le principe d'Huygens-Fresnel à partir du développement en ondes planes.
- Etablir l'expression du champ diffracté et présenter les propriétés des figures de diffraction en champ lointain.

La problématique générale abordée dans ce chapitre peut se résumer comme suit : dans un milieu homogène, connaissant le champ (amplitude et phase) dans un plan, peut-on en déduire le champ se propageant au-delà de ce plan ? Ou de manière inverse peut-on remonter au champ en amont de ce plan ? Cette question englobe de nombreuses situations : propagation d'un faisceau, diffraction (au sens traditionnel du terme, propagation d'une onde après son interaction avec un objet ou une ouverture de taille finie), synthèse d'ouverture (détermination de la distribution de champ à imposer pour réaliser des fonctions optiques prédéterminées, par exemple focaliser à un endroit précis).

6.1 Développement en ondes planes

On travaille avec une onde scalaire monochromatique. Notons que tout ce qui va être vu dans ce chapitre s'applique à n'importe quel type d'onde scalaire (onde optique dans l'approximation scalaire, onde acoustique, fonction d'onde quantique).

6.1.1 Etablissement du développement en ondes planes (cas 2D)

On s'intéresse à une onde scalaire de la forme $E(x, z, t) = \text{Re}[E(x, z) \exp(-i\omega t)]$, de fréquence (pulsation) ω et de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 2\pi c/\omega$. La situation considérée est

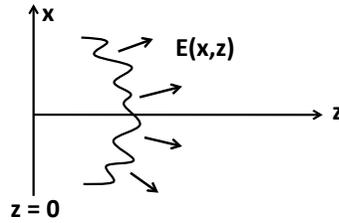


Figure 6.1: Situation générale considérée pour l'établissement du développement en ondes planes. On suppose l'amplitude complexe de l'onde connue dans le plan de référence $z = 0$, et on cherche à exprimer l'onde dans le demi-espace $z > 0$, supposé homogène et assimilé au vide (indice optique $n = 1$).

représentée sur la figure 6.1. On suppose connu le champ (amplitude complexe) $E(x, z = 0)$ dans le plan $z = 0$. Ce champ peut être par exemple celui transmis juste après une ouverture dans un écran opaque (situation standard de diffraction), ou après une diapositive, ou encore à la sortie d'une cavité laser, ou juste au-dessus d'un échantillon observé par un microscope. Cette situation recouvre donc des problèmes très variés. La question posée est alors : connaissant le champ $E(x, z = 0)$ dans le plan de référence, peut-on en déduire le champ en tout point du demi-espace $z > 0$, supposé homogène et assimilé au vide (indice optique $n = 1$) ?

Mathématiquement, le problème peut se formuler simplement. En régime monochromatique, l'amplitude complexe du champ obéit à l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 E(x, z) + \frac{\omega^2}{c^2} E(x, z) = 0 \quad (6.1)$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien. Il faut joindre à cette équation du second ordre deux conditions aux limites :

- $E(x, z = 0)$ est connu (6.2)

- Le champ se propage vers les $z > 0$ (6.3)

Nous allons voir que la solution générale de l'Eq. (6.1), compatible avec les conditions aux limites ci-dessus, peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale qui s'interprète facilement comme une superposition d'ondes planes. Pour cela, nous allons utiliser la transformation de Fourier. Dans un plan $z = \text{cte}$ quelconque (avec $z > 0$), on introduit la transformée de Fourier du champ par rapport à la variable x :¹

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\alpha, z) \exp(i\alpha x) \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6.4)$$

La variable α est ici la variable conjuguée de x , qui joue le rôle d'une fréquence spatiale (plus précisément d'une pulsation spatiale). Cette expression définit également la convention que nous utiliserons pour la transformée de Fourier spatiale. La transformée inverse, qui permet de calculer $\tilde{E}(\alpha, z)$ à partir de $E(x, z)$ s'écrit :

$$\tilde{E}(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, z) \exp(-i\alpha x) dx$$

¹Le champ est à énergie finie, donc l'amplitude complexe est de carré sommable. On peut donc utiliser la transformation de Fourier de fonctions définies dans \mathbf{L}^2 .

Si l'on impose au champ décrit par (6.4) d'obéir à l'équation de Helmholtz, ce qui revient à dire qu'on lui impose d'être une onde et pas n'importe quelle fonction de x et z , on obtient en insérant (6.4) dans (6.1) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}(\alpha, z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \right) \tilde{E}(\alpha, z) \right] \exp(i\alpha x) \frac{d\alpha}{2\pi} = 0 \quad (6.5)$$

Le terme entre crochet doit être identiquement nul (les fonction $\exp(i\alpha x)$ forment une base de l'espace des fonctions complexes de variable réelle). On a donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{E}(\alpha, z) + \gamma^2(\alpha) \tilde{E}(\alpha, z) = 0 \text{ avec } \gamma^2(\alpha) = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 \quad (6.6)$$

On peut alors intégrer cette équation par rapport à la variable z (α étant ici un paramètre fixé). La solution générale s'écrit :

$$\tilde{E}(\alpha, z) = A(\alpha) \exp[i\gamma(\alpha)z] + B(\alpha) \exp[-i\gamma(\alpha)z] \quad (6.7)$$

où $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ sont deux constantes d'intégration, qui dépendent éventuellement de α . Afin d'avoir toutes les solutions (à la fois pour $\gamma^2 > 0$ et pour $\gamma^2 < 0$), il faut utiliser la détermination suivante de $\gamma(\alpha)$:

$$\bullet \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2} \quad \text{si } |\alpha| \leq \frac{\omega}{c} \quad (6.8)$$

$$\bullet \quad \gamma(\alpha) = i\sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{si } |\alpha| > \frac{\omega}{c} \quad (6.9)$$

Les deux constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites. La condition (6.3) impose que $B(\alpha) = 0$ (une onde en $\exp(-i\gamma z - i\omega t)$ se propagerait vers les $z < 0$). La condition (6.2) impose alors directement $\tilde{E}(\alpha, z = 0) = A(\alpha)$, ce qui détermine bien $A(\alpha)$ car comme $E(x, z = 0)$ est supposé connu, sa transformée de Fourier $\tilde{E}(\alpha, z = 0)$ l'est aussi. Finalement, la transformée de Fourier du champ dans un plan $z = cte$ quelconque est reliée à la transformée de Fourier dans le plan de référence $z = 0$ par :

$$\tilde{E}(\alpha, z) = \tilde{E}(\alpha, z = 0) \exp[i\gamma(\alpha)z] \quad (6.10)$$

On peut donc dire que la fonction $\exp[i\gamma(\alpha)z]$ est le propagateur du champ dans l'espace de Fourier. Notons que cette relation permet également de passer du plan $z = cte$ au plan $z = 0$, et donc d'effectuer une opération de rétropropagation.

Le propagation dans l'espace direct (qui est le résultat final que l'on cherche) s'obtient en insérant (6.10) dans (6.4) :

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\alpha, z = 0) \exp[i\alpha x + i\gamma(\alpha)z] \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6.11)$$

Cette expression donne l'amplitude complexe du champ en tout point du demi-espace $z > 0$ en fonction du champ (plus précisément de sa transformée de Fourier) dans le plan $z = 0$ pris comme plan de référence ². Prenons bien garde au fait que $\gamma(\alpha)$ dans cette expression est donné par les

²On peut prendre un plan arbitraire comme plan de référence. Si l'on choisit le plan $z = z_0$, l'expression a la même forme, en remplaçant $\tilde{E}(\alpha, z = 0)$ par $\tilde{E}(\alpha, z = z_0)$ et $\exp[i\gamma(\alpha)z]$ par $\exp[i\gamma(\alpha)(z - z_0)]$.

relations (6.8) et (6.9), et que γ n'est donc pas une variable d'intégration mais une fonction de α . Ceci signifie que (6.11) n'est pas une simple transformée de Fourier du champ par rapport aux variables x et z (dont les variables conjuguées seraient α et γ), mais c'est une expression qui prend en compte le fait que $E(x, z)$ obéit à une équation d'onde. Une conséquence est que α et γ sont liés par $\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2$.

6.1.2 Généralisation au cas 3D

La même démonstration peut s'appliquer au cas 3D, avec une amplitude complexe $E(x, y, z)$. On obtient alors :

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\alpha, \beta, z=0) \exp[i\alpha x + i\beta y + i\gamma(\alpha, \beta)z] \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \quad (6.12)$$

On a cette fois $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2$, et la détermination suivante de $\gamma(\alpha, \beta)$:

$$\bullet \quad \gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2} \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2} \quad (6.13)$$

$$\bullet \quad \gamma(\alpha, \beta) = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \quad (6.14)$$

L'expression (6.12), ou sa version 2D (6.11), donne le champ qui s'est propagé depuis le plan de référence $z = 0$ sous forme d'une superposition d'ondes planes d'amplitude $\tilde{E}(\alpha, \beta, z = 0)$ et de vecteur d'onde $\mathbf{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$. C'est de là que vient l'appellation *développement en ondes planes*. On utilise aussi parfois l'appellation *spectre angulaire*, du fait que la transformée de Fourier par rapport aux variables de position fait apparaître des variables conjuguées qui sont les composantes du vecteurs d'onde, et qui définissent donc l'angle que fait le vecteur d'onde par rapport à l'axe Oz .

6.1.3 Relations d'incertitude et diffraction

Les composantes du vecteur d'onde selon Ox et Oy , notées α et β , sont les pulsations spatiales (ou par abus de langage les fréquences spatiales) du champ dans la direction transverse (par rapport à l'axe Oz). Du fait de la relation de transformée de Fourier, aux variations rapides du champ selon Ox et Oy sont associées des grandes fréquences spatiales α et β . Plus précisément, si l'on note Δx (resp. Δy) l'échelle caractéristique de variation du champ dans la direction Ox (resp. Oy), et si l'on note α_{max} (resp. β_{max}) la fréquence spatiale maximale présente dans le spectre³, on a :

$$\boxed{\Delta x \alpha_{max} \simeq 2\pi \quad \Delta y \beta_{max} \simeq 2\pi} \quad (6.15)$$

Ces relations de transformée de Fourier (qui ont la forme de relations d'incertitude) permettent d'expliquer le phénomène de *diffraction*. Considérons la géométrie canonique de diffraction de la figure 6.2.

³Ceci signifie qu'au-delà de α_{max} (resp. β_{max}) l'amplitude de la transformée de Fourier $|\tilde{E}(\alpha, \beta, z = 0)|$ est négligeable.

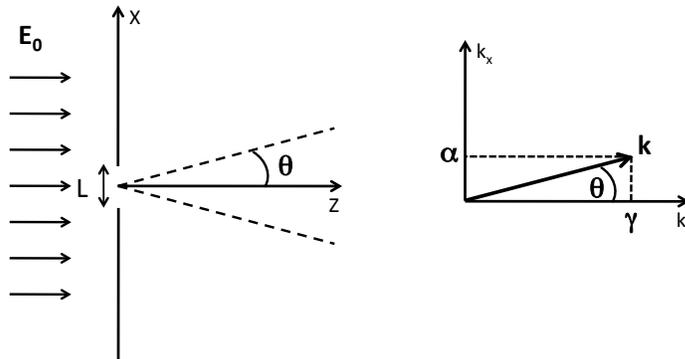


Figure 6.2: Diffraction par une fente de largeur L dans un écran opaque éclairée par une onde plane monochromatique d'amplitude E_0 (la fente est dans la direction de l'axe Oy). Le schéma de droite représente le vecteur d'onde \mathbf{k} d'une des ondes planes du développement du champ, et ses composantes α et γ .

A droite de la fente de largeur L , le champ qui se propage peut s'exprimer sous la forme d'un développement en ondes planes selon l'Eq. (6.11). Sans faire aucun calcul, on peut déterminer l'ordre de grandeur de l'ouverture angulaire du faisceau transmis. Le vecteur d'onde \mathbf{k} d'une des ondes planes du développement a une composante α associée à la direction Ox , et l'angle θ que fait le vecteur \mathbf{k} avec l'axe Oz est tel que $\alpha = (2\pi/\lambda) \sin \theta$, où $\lambda = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde. D'après la relation d'"incertitude" (6.15), la plus grande valeur de α présente dans le spectre est $\alpha_{max} \simeq 2\pi/L$. L'ouverture angulaire du faisceau transmis est donc qualitativement donnée par l'angle θ_{max} tel que $\alpha_{max} = (2\pi/\lambda) \sin \theta_{max}$ (nous démontrerons plus rigoureusement ce résultat plus loin dans ce chapitre). On a donc finalement :

$$\sin \theta_{max} \simeq \frac{\lambda}{L} \quad (6.16)$$

Ce résultat est très général, et décrit le phénomène de diffraction. Nous retrouverons souvent dans le cours l'ordre de grandeur λ/L pour l'ouverture angulaire due à la diffraction. Retenons que l'origine physique de la diffraction est le confinement transverse de l'onde sur la distance L qui génère une dispersion du vecteur d'onde transverse (fréquence spatiale) α jusqu'à une valeur de l'ordre de $2\pi/L$. La diffraction apparaît ainsi comme une conséquence directe des lois de la propagation des ondes.

6.1.4 Ondes évanescentes, champ proche et limite de résolution

Une autre propriété du développement en ondes planes est l'apparition d'ondes évanescentes (dans la direction Oz) pour les hautes fréquences spatiales. En effet, en raisonnant en 2D dans le plan (Ox, Oz) , on remarque que pour les hautes fréquences spatiales α telles que $|\alpha| > 2\pi/\lambda$, on a $\gamma(\alpha) = i\sqrt{\alpha^2 - (2\pi/\lambda)^2}$. Une composante selon Oz du vecteur d'onde imaginaire pure correspond à une onde évanescente, qui décroît en $\exp[-\text{Im}(\gamma(\alpha))z]$. On aboutit donc à la conclusion que la propagation est un *filtre passe-bas* en fréquences spatiales. Les basses fréquences telles que $|\alpha| \leq 2\pi/\lambda$ sont multipliées par un terme de phase $\exp[i\gamma(\alpha)z]$. Les hautes fréquences $|\alpha| > 2\pi/\lambda$ sont par contre atténuées exponentiellement.

Ce filtrage passe-bas est à l'origine de la limite de résolution ultime des systèmes d'imagerie classique (ex : microscope, télescope) qui fonctionnent en champ lointain. Ces instruments ne sont sensibles qu'au champ qui s'est propagé sur des distances bien supérieures à la distance d'atténuation des ondes évanescentes, de telle sorte qu'ils ne peuvent détecter de fréquences spatiales au-delà d'un $\alpha_{max} = 2\pi/\lambda$. La relation d'incertitude de transformée de Fourier indique alors que les variations spatiales transverses Δx les plus petites que l'on peut détecter sont de l'ordre de λ . Qualitativement, la résolution transverse est donc limitée à λ (on parle habituellement de limite de diffraction). Nous étudierons la limite de résolution plus précisément dans les chapitres 7 et 8.

Il est possible d'aller au-delà de la limite de résolution des instruments d'imagerie classique. Une possibilité est de venir détecter le champ à proximité de l'objet à imager, dans la zone dite de *champ proche*. Si l'on est capable de mesurer les ondes évanescentes, alors on peut améliorer la résolution spatiale transverse jusqu'à $\Delta x = 2\pi/\alpha_{max}$ où α_{max} est la plus grande fréquence spatiale que l'instrument puisse détecter. Une question clé est : à quelle distance faut-il effectuer la détection ? On peut qualitativement donner la réponse. Supposons que dans le domaine visible ($\lambda = 500$ nm) on souhaite obtenir une résolution $\Delta x = 50$ nm $\ll \lambda$. Il faut donc détecter au-moins les fréquences spatiales jusqu'à $\alpha_{max} = 2\pi/\Delta x$. Comme $\Delta x \ll \lambda$, on a $\alpha_{max} \gg 2\pi/\lambda$ et donc $\gamma(\alpha_{max}) \simeq i|\alpha_{max}| = i2\pi/\Delta x$. On a donc une onde évanescente de la forme $\exp(-z/\delta)$ avec $\delta = \Delta x/2\pi \simeq 10$ nm. Cet ordre de grandeur résume toute la difficulté de l'optique de champ proche. On peut *a priori* obtenir des résolutions bien au-delà de la limite de diffraction en détectant les ondes évanescentes, mais cela nécessite des distances d'approche de quelques nanomètres. Le domaine de l'imagerie optique de champ proche, et plus généralement de la nanophotonique (qui concerne la manipulation des ondes optiques aux échelles sub-longueur d'onde), s'est beaucoup développé depuis la fin des années 1990 (pour une introduction, voir [3], pour un exposé plus détaillé des concepts et des techniques, voir [4,5]).

6.1.5 Exemple d'application : diffraction à distance finie par une fente

Etablissons l'expression du développement en ondes planes dans la géométrie canonique de diffraction de la figure 6.2. Dans le plan $z = 0^+$, juste après l'écran opaque et la fente, on peut modéliser le champ $E(x, z = 0)$ comme suit ⁴ :

$$\begin{aligned} E(x, z = 0) &= E_0 \quad \text{si} \quad -L/2 \leq x \leq L/2 \\ E(x, z = 0) &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$ est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\alpha, z = 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, z = 0) \exp(-i\alpha x) dx \\ &= E_0 \int_{-L/2}^{+L/2} \exp(-i\alpha x) dx \\ &= E_0 L \operatorname{sinc} \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \end{aligned}$$

⁴Exprimer le champ dans le plan de l'écran sous cette forme est une approximation (dite approximation de Kirchhoff), valable lorsque $L \gg \lambda$.

En utilisant ce résultat dans (6.11), le champ $E(x, z)$ en tout point du demi-espace $z > 0$ est donc :

$$E(x, z) = E_0 L \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \exp[i\alpha x + i\gamma(\alpha)z] \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (6.17)$$

avec $\gamma(\alpha)$ donné par (6.8-6.9). Il s'agit d'une expression exacte du champ transmis par la fente, bien que non explicite puisque l'intégrale ne se calcule pas analytiquement. Cette intégrale pourrait se calculer numériquement sans difficulté particulière (en utilisant par exemple un algorithme FFT - Fast Fourier Transform). On peut cependant tirer des informations de cette expression intégrale même sans la calculer. Par exemple, on sait que la fonction $\text{sinc}(X)$ a un lobe principal délimité par son premier zéro obtenu pour $X = \pi$. On en déduit donc que l'essentiel des ondes planes du développement ont un vecteur d'onde α selon Ox compris entre 0 et α_{max} tel que $\alpha_{max}L/2 = \pi$. En termes d'angles, on obtient ainsi que l'ouverture angulaire θ_{max} du lobe principal de propagation du champ transmis (lobe principal de diffraction) est telle que $2\pi/\lambda \sin \theta_{max} L/2 = \pi$, ce qui redonne la relation $\sin \theta_{max} = \lambda/L$ que nous avons déjà obtenue précédemment.

6.2 Principe de Huygens-Fresnel

Nous allons montrer que le développement en ondes planes permet de retrouver une formulation identique à celle obtenue par le principe d'Huygens-Fresnel. Historiquement, à une époque où la nature ondulatoire de la lumière n'était pas établie, il a fallu avoir recours à un principe pour décrire le phénomène de diffraction, perçu comme une anomalie aux lois de l'optique géométrique. Ici nous allons voir que la formulation d'Huygens-Fresnel découle naturellement des lois de la propagation des ondes, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter un principe supplémentaire.

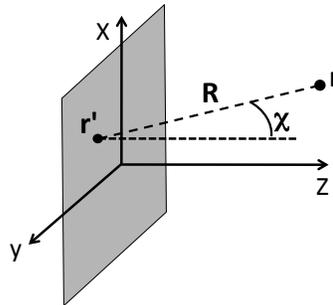


Figure 6.3: Géométrie utilisée pour exprimer le principe d'Huygens-Fresnel. Le plan grisé est le plan de référence, choisi ici comme étant le plan $z = 0$.

Pour cela, dans la géométrie de la figure 6.3, nous démarrons par l'expression du champ $E(x, y, z)$ dans le demi-espace $z > 0$, en régime monochromatique, sous la forme du développement en ondes planes (6.12), puis nous effectuons une série de transformations exploitant les propriétés

de la transformée de Fourier et du produit de convolution (que nous noterons \otimes) :

$$\begin{aligned}
E(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\alpha, \beta, z=0) \exp[i\alpha x + i\beta y + i\gamma z] \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \\
&= \text{TF} \left[\tilde{E}(\alpha, \beta, z=0) \times \exp(i\gamma z) \right] \\
&= \text{TF} \left[\tilde{E}(\alpha, \beta, z=0) \right] \otimes \text{TF} [\exp(i\gamma z)] \\
&= E(x, y, z) \otimes \text{TF} [\exp(i\gamma z)]
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Il faut alors déterminer la transformée de Fourier de $\exp(i\gamma z)$ (ne pas oublier que γ est une fonction de α et β). Pour cela, on peut utiliser le développement en ondes planes d'une onde sphérique (admis, pour une démonstration voir par exemple [2]) :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = 2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma} \exp[i\alpha x + i\beta y + i\gamma|z|] \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \tag{6.19}$$

avec $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. En dérivant par rapport à z , pour $z > 0$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikr)}{r} = -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\alpha x + i\beta y + i\gamma z] \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \tag{6.20}$$

L'intégrale n'est autre que la transformée de Fourier de $\exp(i\gamma z)$ que nous recherchons. En reportant ce résultat dans (6.18), on obtient l'expression suivante du champ dans le demi-espace $z > 0$:

$$E(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikR)}{R} E(x', y', z=0) dx' dy' \tag{6.21}$$

où l'intégrale est étendue à tout le plan $z = 0$. On a noté $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ la distance entre le point d'observation $\mathbf{r} = (x, y, z)$ et le point courant $\mathbf{r}' = (x', y', z=0)$ dans le plan $z = 0$. Notons que la fonction $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp(ikR)/R$ est la fonction de Green des ondes scalaires dans l'espace libre, qui représente le champ rayonné au point \mathbf{r} par une source ponctuelle au point \mathbf{r}' (ici en régime monochromatique à la fréquence ω). L'expression (6.21) est une équation exacte (obtenue sans approximation), mais qui reste complexe à manipuler. Nous pouvons la simplifier dans l'hypothèse où le champ est observé à grande distance, c'est-à-dire dans la limite $r \gg \lambda$, avec $r = |\mathbf{r}|$. On a alors la simplification :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\exp(ikR)}{R} \simeq ik \cos \chi \frac{\exp(ikR)}{R}$$

où $\cos \chi = (z - z')/R$ est l'angle indiqué sur la figure 6.3. En insérant cette approximation dans (6.21), on obtient finalement :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int \cos \chi \frac{\exp(ikR)}{R} E(x', y', z=0) dx' dy' \tag{6.22}$$

Ce résultat exprime le principe d'Huygens-Fresnel : l'amplitude complexe du champ au point $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est la superposition d'ondes sphériques issues du plan $z = 0$ et centrées en \mathbf{r}' , dont l'amplitude est proportionnelle au champ du point \mathbf{r}' . La démonstration que nous avons présentée fait apparaître le facteur d'inclinaison (ou d'obliquité) $(1/i\lambda) \cos \chi$ qui historiquement

avait été ajouté au principe d'Huygens-Fresnel initial pour tenir compte d'une anisotropie dans le rayonnement de \mathbf{r}' à \mathbf{r} et améliorer la description de la diffraction aux grands angles.

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, on a $\cos \chi \simeq 1$ (ceci signifie que les "rayons" connectant \mathbf{r}' à \mathbf{r} restent quasi-parallèles l'axe Oz). L'Eq. (6.22) se simplifie en l'expression très couramment utilisée du principe d'Huygens-Fresnel :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int \frac{\exp(ikR)}{R} E(x', y', z = 0) dx' dy' \quad (6.23)$$

Le principe d'Huygens-Fresnel est un point de départ utile pour de nombreux calculs pratiques de diffraction. Il faut garder à l'esprit qu'il reste une formulation approchée, et qu'un calcul exact peut-être effectué à l'aide du développement en ondes planes. Même s'il faut souvent avoir recours à un calcul numérique (un calcul analytique de l'intégrale de Fourier n'est possible que dans quelques cas très rares), ceci ne pose plus aucun problème à l'heure actuelle, et des algorithmes très performants et simples à utiliser sont disponibles (le plus connu étant l'algorithme FFT).

6.3 Diffraction en champ lointain

Lorsque le champ diffracté est observé à grande distance du plan de référence (plan de l'ouverture diffractante, d'un masque de phase, d'une diapositive...), son lien avec le champ dans ce plan peut s'exprimer de manière simplifiée. On parle d'approximation de *champ lointain*.

6.3.1 Formulation à partir du principe d'Huygens-Fresnel

En référence à la géométrie de la figure 6.3, nous allons supposer que $z \gg x', y'$, et donc que $r \gg x', y'$ (distance d'observation grande devant l'extension du champ dans le plan de référence $z = 0$). On peut alors effectuer un développement limité au premier ordre de R par rapport à x'/r et y'/r :

$$\begin{aligned} R &= [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \\ &= r \left[1 - \frac{2xx'}{r^2} - \frac{2yy'}{r^2} + \frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{r^2} \right]^{1/2} \\ &\simeq r \left(1 - \frac{xx'}{r^2} - \frac{yy'}{r^2} \right) \end{aligned}$$

On peut alors simplifier l'onde sphérique :

$$\frac{\exp(ikR)}{R} \simeq \frac{\exp(ikr)}{r} \exp(-ikxx'/r) \exp(-iky'y'/r) \quad (6.24)$$

Pour que ce développement soit valable, il faut que les termes du second ordre soient négligeables dans le terme de phase également, ce qui implique $kx'^2/r \ll 2\pi$ et $ky'^2/r \ll 2\pi$, ce qui signifie $r \gg x'^2/\lambda$ et $r \gg y'^2/\lambda$. Ces deux conditions sont nécessaires, en plus de $r \gg x', y'$, pour que l'approximation de champ lointain soit valable. Si l'on note L l'échelle de l'extension spatiale du

champ dans le plan de référence $z = 0$, alors on retiendra que les conditions de champ lointain sont :

$$r \gg L, r \gg \frac{L^2}{\lambda} \quad (\text{conditions de champ lointain}) \quad (6.25)$$

Dans ces conditions, l'Eq. (6.22) devient alors :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \frac{z}{r} \frac{\exp(ikr)}{r} \int E(x', y', z = 0) \exp(-ikxx'/r) \exp(-iky'y'/r) dx' dy' \quad (6.26)$$

où l'on a utilisé le fait qu'en approximation de champ lointain $\cos \chi \simeq z/r$. Le terme intégrale est en fait la transformée de Fourier spatiale du champ dans le plan $z = 0$ (par rapport aux variables x' et y'), calculée aux fréquences spatiales $\alpha = kx/r$ et $\beta = ky/r$. On a donc :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \frac{z}{r} \tilde{E}(\alpha, \beta, z = 0) \frac{\exp(ikr)}{r} \quad \text{avec } \alpha = \frac{kx}{r}, \beta = \frac{ky}{r} \quad (6.27)$$

Cette expression est le résultat central de la diffraction en champ lointain (ou diffraction de Fraunhofer). Il montre que le champ au point \mathbf{r} est une onde sphérique dont l'amplitude est la transformée de Fourier spatiale du champ dans le plan de référence $z = 0$. Nous allons discuter dans la suite des nombreuses conséquences de ce résultat.

6.3.2 Formulation par le développement en ondes planes

Il est possible d'établir l'expression précédente directement à partir du développement en ondes planes, sans passer par la formulation de type Huygens-Fresnel. Mathématiquement, cela revient à trouver une expression asymptotique de l'expression (6.12) que nous rappelons ici

$$E(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\alpha, \beta, z = 0) \exp[i\alpha x + i\beta y + i\gamma z] \frac{d\alpha d\beta}{4\pi^2} \quad (6.28)$$

lorsque $kr \rightarrow +\infty$, avec $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Le résultat s'obtient en utilisant le théorème de la phase stationnaire (admis, voir par exemple [2], appendix III). L'application directe du théorème conduit à :

$$E(x, y, z) \simeq \frac{-ik}{2\pi} \frac{z}{r} \tilde{E}(\alpha = kx/r, \beta = ky/r, z = 0) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

On retrouve exactement l'expression (6.27).

6.3.3 Propriétés des figures de diffraction en champ lointain

En champ lointain, l'amplitude du champ diffracté est la transformée de Fourier spatiale du champ dans le plan de référence. Formellement, on peut écrire l'Eq. (6.27) sous la forme compacte :

$$E(x, y, z) = F(\alpha, \beta) \frac{\exp(ikr)}{r} \quad (6.29)$$

où l'amplitude du champ diffracté en champ lointain $F(\alpha, \beta)$ est donnée par

$$F(\alpha, \beta) = \frac{-ik}{2\pi} \frac{z}{r} \tilde{E}(\alpha = kx/r, \beta = ky/r, z = 0) \quad (6.30)$$

En pratique, le plan de référence est le plan contenant l'objet diffractant (exemple : ouverture dans un écran opaque, diapositive) ou un plan choisi juste à la sortie de l'objet diffractant (exemple : échantillon observé au microscope, lentille mince, réseau de diffraction gravé sur un substrat). De cette relation de transformée de Fourier découlent plusieurs propriétés générales (on suppose connues les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier).

Translation de l'objet dans son plan

Si l'on effectue la transformation

$$E(x, y, z = 0) \rightarrow E(x - x_0, y - y_0, z = 0)$$

alors l'amplitude du champ diffracté se transforme selon

$$F(\alpha, \beta) \rightarrow F(\alpha, \beta) \exp(-i\alpha x_0 - i\beta y_0)$$

On multiplie donc la figure de diffraction par un terme de phase qui dépend de la direction d'observation (il dépend de α et β). Cela ne change pas l'intensité.

Dilatation/Contraction

Si l'on effectue la transformation

$$E(x, y, z = 0) \rightarrow E(ax, by, z = 0)$$

alors l'amplitude du champ diffracté se transforme selon

$$F(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{ab} F\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right)$$

Une dilatation de l'objet entraîne une contraction de figure de diffraction, et *vice versa*. Notons que c'est bien le comportement attendu lorsque l'objet est une simple ouverture. Le préfacteur $1/(ab)$ décrit alors le changement d'intensité transmise lorsque l'ouverture augmente ou diminue.

Changement de direction de l'onde incidente

Si l'on passe de l'incidence normale à une direction d'incidence correspondant au vecteur d'onde $\mathbf{k}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, la transformation correspondante pour le champ dans le plan de référence est :

$$E(x, y, z = 0) \rightarrow E(x, y, z = 0) \exp(i\alpha x_0 + i\beta y_0)$$

L'amplitude du champ diffracté se transforme selon

$$F(\alpha, \beta) \rightarrow F(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0)$$

On décale donc la figure de diffraction, sans la changer. Elle est alors centrée sur la direction incidente.

Relation d'“incertitude”. Ouverture angulaire due à la diffraction

Une dernière propriété fondamentale de la transformée de Fourier, que nous avons déjà utilisée dans ce chapitre, indique que si Δx est la plus petite échelle de variation de $E(x, y, z = 0)$ le long de la direction Ox , alors la plus grande fréquence spatiale α_{max} pour laquelle $F(\alpha, \beta)$ est non négligeable vérifie

$$\Delta x \alpha_{max} \simeq 2\pi$$

Le même raisonnement s'applique pour la direction Oy , avec $\Delta y \beta_{max} \simeq 2\pi$. Angulairement, à la fréquence spatiale α correspond un angle θ tel que $\alpha = k \sin \theta$, comme sur la figure 6.2. On a donc un angle d'ouverture maximum θ_{max} tel que

$$\sin \theta_{max} \simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (6.31)$$

Lorsque θ_{max} est petit, on utilise l'approximation $\sin \theta_{max} \simeq \theta_{max}$ et la relation devient simplement $\theta_{max} \simeq \lambda/\Delta x$. Nous retrouvons donc l'ordre de grandeur pour l'ouverture angulaire du à la diffraction dont nous avons déjà parlé dans ce chapitre.

Références

- [1] Pour un traitement moderne de la diffraction utilisant l'optique de Fourier, voir par exemple : R.-J. Champeau, R. Carpentier et Y. Lorgeré, *Ondes Lumineuses : Propagation, Optique de Fourier, Cohérence* (de Boeck, Bruxelles, 2009).
- [2] Pour une approche historique très complète, voir M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition.
- [3] C. Boccara et R. Carminati, Champ proche optique : de l'expérience la théorie, dans *Les Nanosciences : Nanotechnologies et Nanophysique*, édité par M. Lahmani, C. Dupas et P. Houdy (Belin, 2004).
- [4] L. Aigouy, Y. De Wilde et C. Frétigny, *Les Nouvelles Microscopies : A la Découverte du Nanomonde* (Belin, 2006).
- [5] L. Novotny and B. Hecht, *Principles of Nano-Optics* (Cambridge University Press, 2006).

Chapitre 7

Diffraction - Exemples

Objectifs

- Calculer les figures de diffraction d'une fente et d'une ouverture circulaire qui sont d'un grand intérêt pratique.
- Présenter la limite de résolution d'un microscope (ou d'un télescope) due à la diffraction.
- Discuter la diffraction par un réseau périodique et l'application à la spectroscopie.

7.1 Diffraction par une fente

7.1.1 Calcul exact (développement en ondes planes)

La géométrie canonique de diffraction par une fente est représentée sur la figure 7.1. Dans le demi-espace $z > 0$, le champ peut être exprimé sous la forme d'un développement en ondes planes. Le calcul a déjà été effectué au chapitre 6 (section 6.1.5). Nous rappelons ici le résultat.

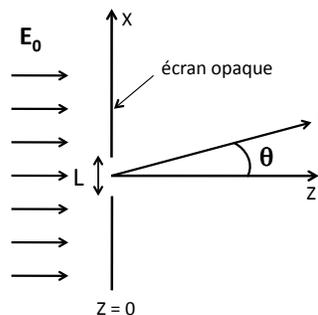


Figure 7.1: Diffraction par une fente 2D (invariante par translation le long de la direction Oy), éclairée par une onde plane monochromatique d'amplitude E_0 polarisée linéairement dans la direction Oy (problème scalaire).

Le champ dans le plan $z = 0$ peut se modéliser simplement dans le cadre de l'approximation de

Kirchhoff :

$$\begin{aligned} E(x, z = 0) &= E_0 \text{ si } -L/2 \leq x \leq L/2 \\ E(x, z = 0) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

et sa transformée de Fourier spatiale est alors :

$$\tilde{E}(\alpha, z = 0) = E_0 L \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha L}{2}\right)$$

Le développement en onde plane, valable pour tout $z > 0$, s'écrit donc :

$$E(x, z) = E_0 L \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \exp(i\alpha x + i\gamma z) \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (7.1)$$

avec $\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2 = (2\pi/\lambda)^2$. Cette intégrale pourrait être calculée numériquement (par exemple avec un algorithme de transformée de Fourier rapide ou FFT). Notons que la convergence est assurée pour les grandes valeurs de $|\alpha|$. En effet, pour $|\alpha| \gg 2\pi/\lambda$, le terme $\exp(i\gamma z)$ produit un filtre exponentiel en $\exp[-\operatorname{Im}(\gamma)z]$ (aux grandes fréquences spatiales sont associées des ondes évanescentes). On rappelle également que cette expression montre sans faire aucun calcul que l'ouverture angulaire θ_{max} du lobe principal est donnée par la condition $\alpha_{max} L/2 = \pi$ (premier zéro de la fonction sinc), avec $\alpha_{max} = (2\pi/\lambda) \sin \theta_{max}$.

7.1.2 Expression en champ lointain

Les conditions de champ lointain sont $r \gg L$ et $r \gg L^2/\lambda$, avec $r = |\mathbf{r}|$ la distance d'observation. En optique, les conditions de champ lointain (dites "à l'infini") sont souvent obtenues en observant dans le plan focal image d'une lentille convergente. Nous avons montré au chapitre 6 (Eq. 6.27) que l'amplitude diffractée est alors :

$$F(\alpha) \propto \tilde{E}(\alpha = k \sin \theta, z = 0)$$

avec $\sin \theta = x/r$. L'intensité de la figure de diffraction observée en fonction de l'angle θ varie donc comme :

$$I(\theta) \propto \left| \operatorname{sinc}\left(k \sin \theta \frac{L}{2}\right) \right|^2 \quad (7.2)$$

Le lobe principal de diffraction a une ouverture angulaire donné par le premier zéro de la fonction sinc, telle que $k \sin \theta_{max} L/2 = \pi$, ce qui permet de montrer rigoureusement en champ lointain le résultat que nous avons déjà trouvé qualitativement à partir du développement en ondes planes :

$$\sin \theta_{max} = \frac{\lambda}{L} \quad (7.3)$$

7.2 Diffraction par une ouverture circulaire

7.2.1 Tache d'Airy

Pour une ouverture circulaire de rayon a , l'intégration dans le plan de l'ouverture (permettant de calculer la transformée de Fourier du champ) peut s'effectuer en coordonnées polaires, en

utilisant le changement de variables :

$$x = \rho \cos \theta' , \quad y = \rho \sin \theta'$$

De plus, la symétrie de révolution autour de l'axe Oz permet de se limiter au plan (Ox, Oz) , ce qui revient à prendre $\beta = 0$, β étant la fréquence spatiale associée à la direction Oy . L'amplitude diffractée à l'infini s'écrit donc :

$$F(\alpha, \beta = 0) = \int_0^a \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} \exp(-i\alpha\rho \cos \theta') \, d\theta'$$

Cette intégrale donne une fonction de Bessel d'ordre un, notée J_1 :

$$F(\alpha, \beta = 0) = \pi a^2 \frac{2 J_1(a\alpha)}{a\alpha}$$

En utilisant l'angle θ pour décrire la direction d'observation, avec $\alpha = k \sin \theta$, l'intensité diffractée en champ lointain est de la forme :

$$I(\theta) \propto \left| \frac{2 J_1(k a \sin \theta)}{k a \sin \theta} \right|^2 \quad (7.4)$$

Cette fonction décrit la *tache d'Airy* (à ne pas confondre avec la fonction d'Airy décrivant la transmission d'un interféromètre de Fabry-Pérot), qui représente l'intensité diffractée en champ lointain par une ouverture circulaire. Elle est représentée sur la figure 7.2. Cette fonction est d'une grande importance car elle décrit la limite de résolution imposée par la diffraction aux systèmes d'imagerie ayant une pupille d'entrée circulaire, comme les microscopes ou les télescopes.

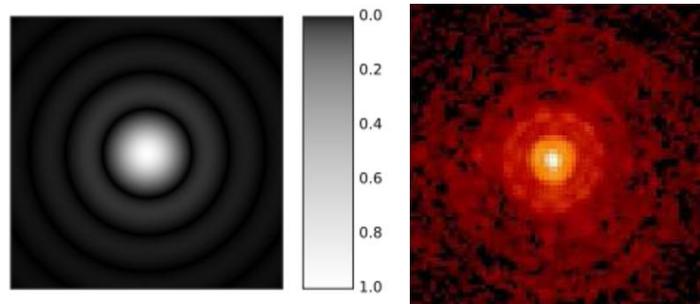


Figure 7.2: Gauche : représentation de la tache d'Airy théorique. Droite : image brute d'une étoile produite par un télescope, dans laquelle on distingue la tache d'Airy, conséquence de la taille limitée de la pupille du télescope.

La fonction $J_1(X)$ a son premier zéro en $X \simeq 3,83$, et donc le premier zéro de la figure de diffraction est obtenu pour $k a \sin \theta_{max} = 3,83$ ce qui donne

$$\sin \theta_{max} = \frac{1,22 \lambda}{2a} \quad (7.5)$$

7.2.2 Limite de résolution d'un microscope

En référence à la figure 7.3, considérons un système d'imagerie ayant une pupille circulaire de diamètre D et formant l'image de deux points A et B . On suppose le système corrigé en aberrations, ce qui signifie que la résolution est uniquement limitée par la diffraction (ce qui est le cas en microscopie optique).

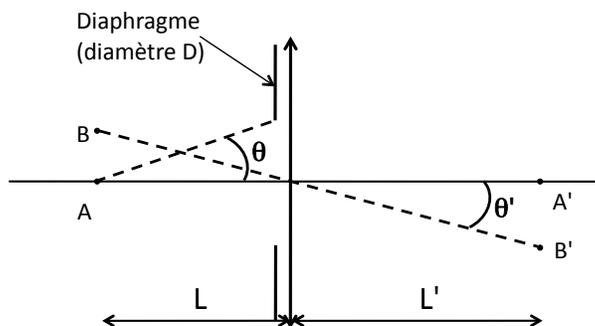


Figure 7.3: Image de deux points A et B formée par un système d'imagerie (assimilé ici à une lentille convergente) ayant une pupille de diamètre D .

La question de la résolution spatiale se formule ainsi : quelle est la plus petite distance AB pour laquelle il est possible de distinguer les deux images A' et B' ?

Un critère (formulé initialement en terme d'angles) a été proposé par Rayleigh (et reste aujourd'hui largement utilisé, sous l'appellation "critère de Rayleigh"). Il stipule qu'il est possible de distinguer les deux points si l'angle de détection θ' est supérieur à la largeur angulaire de la tache d'Airy produite par l'ouverture de diamètre D .

L'application du critère de Rayleigh impose donc $\sin \theta' \geq 1,22\lambda/D$. Or $\sin \theta' \simeq \theta' \simeq A'B'/L' = AB/L$. La condition imposée par le critère de Rayleigh est donc

$$AB \geq \frac{1,22\lambda L}{D} \quad (7.6)$$

Pour exprimer la limite de résolution, on utilise généralement l'*ouverture numérique* du microscope définie par $O.N. = \sin \theta$ où θ est l'angle de collection du microscope (si le milieu incident a un indice de réfraction n différent de 1, l'ouverture numérique est $n \sin \theta$). La plus petite distance $\delta = AB$ qui permet de donner deux images séparables, et qui définit donc la limite de résolution due à la diffraction s'écrit donc finalement sous la forme :

$$\delta = \frac{1,22\lambda}{2n \sin \theta} = \frac{1,22\lambda}{2O.N.} \quad (7.7)$$

Cette relation porte le nom de relation d'Abbe, qui est le premier à avoir formalisé la question de la limite de résolution ultime des microscopes optiques. Nous reviendrons sur cette limite de résolution au chapitre 8.

7.3 Diffraction par un réseau

Un réseau de diffraction est un objet périodique structuré à une échelle proche de la longueur d'onde. La périodicité introduit une discrétisation des directions de diffraction en champ lointain. C'est une autre conséquence de la relation de transformée de Fourier qui lie l'amplitude diffractée en champ lointain au champ dans le plan de l'objet diffractant (ou dans un plan au voisinage de l'objet diffractant).

7.3.1 Réseau de traits infiniment minces

Un tel réseau utilisé en transmission est représenté sur la figure 7.4.

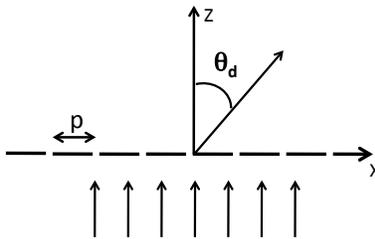


Figure 7.4: Réseau de diffraction formé de traits supposés infiniment minces dans un écran opaque, éclairé en incidence normale et utilisé en transmission.

La transparence en amplitude se modélise par un peigne de Dirac :

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mp) \quad (7.8)$$

où p est la période du réseau et $\delta(\dots)$ la distribution de Dirac. Dans le plan (Ox, Oz) , l'amplitude diffractée dans la direction $\alpha = k \sin \theta_d$ est de la forme :

$$F(\alpha) \propto \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\alpha - m \frac{2\pi}{p}\right) \quad (7.9)$$

On a utilisé le fait que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est également un peigne de Dirac. On a donc des directions discrètes de diffraction, appelées *ordres de diffraction*, et vérifiant

$$\sin \theta_d = m \frac{\lambda}{p}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Physiquement, ces directions sont celles pour lesquelles les champs diffractés par chaque motif du réseau sont en interférences constructives. En effet, le déphasage entre les champs produits par deux motifs séparés d'une période est $\phi = (2\pi/\lambda)p \sin \theta_d$. La condition d'interférence constructive est $\phi = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, ce qui redonne la relation ci-dessus. Si le réseau n'est pas éclairé en incidence normale, mais avec un angle d'incidence θ_i , le champ dans le plan du réseau est multiplié par le terme de phase $\exp(i\alpha_i x)$, avec $\alpha_i = (2\pi/\lambda) \sin \theta_i$. L'amplitude diffractée est

donc translatée de α_i (propriété de transformée de Fourier). La relation ci-dessus prend donc la forme générale, connue sous le nom de *loi des réseaux* :

$$\sin \theta_d = \sin \theta_i + m \frac{\lambda}{p}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{transmission}) \quad (7.10)$$

Il faut tenir compte du fait que les angles utilisés dans cette relation sont orientés selon la convention de la figure 7.5. Avec cette convention, la relation ci-dessus s'applique pour les réseaux en transmission. Dans le cas d'un réseau utilisé en réflexion, on a

$$\sin \theta_d + \sin \theta_i = m \frac{\lambda}{p}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (\text{réflexion}) \quad (7.11)$$

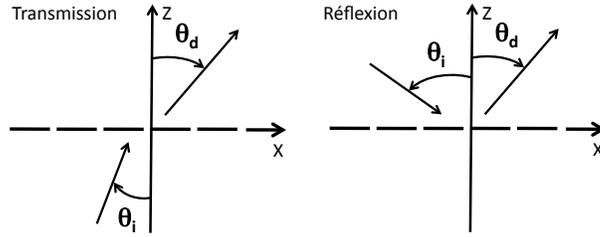


Figure 7.5: Orientation des angles d'incidence et de diffraction pour des réseaux utilisés en transmission et en réflexion. Dans le cas représenté en réflexion, l'angle d'incidence θ_i est négatif. La composante du vecteur d'onde incident associée à la direction Ox est donc $\alpha_i = (2\pi/\lambda) \sin \theta_i$ en transmission et $\alpha_i = -(2\pi/\lambda) \sin \theta_i$ en réflexion.

7.3.2 Réseau avec traits de largeur finie

Un réseau de traits d'épaisseur e a une transparence en amplitude qui s'exprime comme le produit de convolution de la transparence du réseau de traits infiniment minces étudiée précédemment par une fonction porte de largeur e que nous noterons $\text{Rect}_e(x)$:

$$t(x) = \text{Rect}_e(x) \otimes \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mp) \quad (7.12)$$

L'amplitude diffractée dans la direction $\alpha = k \sin \theta_d$ s'obtient donc par le produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions :

$$F(\alpha) \propto \text{sinc} \left(\frac{\alpha e}{2} \right) \times \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta \left(\alpha - m \frac{2\pi}{p} \right) \quad (7.13)$$

On a donc une modulation du champ diffracté par une fonction sinc. Les ordres diffractés sont éteints au-delà d'un angle θ_d^{max} tel que $(2\pi/\lambda) \sin \theta_d^{max} e/2 = \pi$, et donc

$$\sin \theta_d^{max} = \frac{\lambda}{e} \quad (7.14)$$

7.3.3 Réseau de taille finie

En pratique, un réseau de diffraction n'est pas infini dans la direction Ox , mais a une taille finie L . La transparence en amplitude s'écrit comme le produit d'une fonction porte de largeur L et de la transparence du réseau de traits infiniment minces :

$$t(x) = \text{Rect}_L(x) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - mp) \quad (7.15)$$

L'amplitude diffractée est donc donnée par le produit de convolution des transformées de Fourier :

$$F(\alpha) \propto \text{sinc}\left(\frac{\alpha L}{2}\right) \otimes \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\alpha - m \frac{2\pi}{p}\right) \quad (7.16)$$

On a donc cette fois un *élargissement* de chaque ordre de diffraction, avec une demi-largeur angulaire θ telle que $\sin \theta = \lambda/L$.

Remarques :

- On a $L \gg e$, et donc $\lambda/e \gg \lambda/L$. On observe d'autant plus d'ordres et bien séparés que le rapport L/e est grand.
- Dans le cas particulier d'un réseau dont la transparence est sinusoïdale (il est possible de fabriquer de tels réseaux par photolithographie), on n'a que trois ordres de diffraction correspondant à $m = -1, 0, +1$. En transmission, les trois directions de diffraction vérifient¹ :

$$\sin \theta_0 = \sin \theta_i \text{ et } \sin \theta_{\pm 1} = \sin \theta_i \pm \frac{\lambda}{p}$$

7.3.4 Spectroscopie par réseau

La position angulaire des ordres diffractés dépend de la longueur d'onde λ . On peut utiliser cette propriété pour effectuer de la spectroscopie. Comme dans toute les techniques de spectroscopie, il est important de caractériser l'intervalle spectral libre (intervalle utile) et le pouvoir de résolution.

Pouvoir dispersif

Il décrit le changement de direction de diffraction lorsque la longueur d'onde incidente change, et est donc donné par $d\theta_d/d\lambda$. Pour un réseau en transmission, on a à partir de l'Eq. (7.10) pour l'ordre m :

$$\cos \theta_d d\theta_d = \frac{m}{p} d\lambda$$

Le pouvoir dispersif est donc :

$$\frac{d\theta_d}{d\lambda} = \frac{m}{p \cos \theta_d} \quad (7.17)$$

¹Dans le cas de la réflexion, il faut remplacer $\sin \theta_i$ par $-\sin \theta_i$.

Pouvoir de résolution

Du fait de la taille finie du réseau, un ordre a une ouverture angulaire $\Delta\theta_d$ due à la diffraction. A cette ouverture angulaire correspond une largeur spectrale $\Delta\lambda$. Le pouvoir de résolution est défini comme étant $R = \lambda/\Delta\lambda$. Notons bien qu'il s'agit du pouvoir de résolution lorsque la mesure est limitée uniquement par la diffraction (appelé parfois pouvoir de résolution théorique).

L'élargissement angulaire d'un ordre donné est tel que $\Delta(\sin \theta_d) = \lambda/L$, ce qui donne $\cos \theta_d \Delta\theta_d = \lambda/L$. On a donc en utilisant (7.17) :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L \cos \theta_d \frac{\Delta\theta_d}{\Delta\lambda} = m \frac{L}{p}$$

Le rapport $N = L/p$ est le nombre de périodes du réseau, couramment appelé nombre de traits du réseau. On a donc le résultat suivant pour le pouvoir de résolution quand on utilise l'ordre diffracté m :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m N \quad (7.18)$$

Intervalle spectral libre

Pour l'ordre de diffraction m , le nombre d'onde $\sigma = 1/\lambda$ satisfait :

$$\sigma_m = \frac{m}{p(\sin \theta_d - \sin \theta_i)}$$

L'intervalle spectral libre $\Delta\sigma_0$ est alors donné par la distance spectrale entre deux ordres consécutifs :

$$\Delta\sigma_0 = \sigma_{m+1} - \sigma_m = \frac{1}{p(\sin \theta_d - \sin \theta_i)}$$

En réutilisant la loi des réseaux, on aboutit à :

$$\Delta\sigma_0 = \frac{1}{m \lambda} \quad (7.19)$$

Si l'on note $\Delta\sigma$ la limite de résolution spectrale en nombre d'onde, on a $\Delta\sigma = \Delta\lambda/\lambda^2 = 1/(\lambda m N)$. On a donc le résultat très simple :

$$\frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\sigma} = N \quad (7.20)$$

On voit donc l'importance du nombre de traits du réseau en pratique.

Ordre de grandeur : avec 10^3 traits/mm, et $L = 100$ mm, on a $N = 10^5$. Ce paramètre $\Delta\sigma_0/\Delta\sigma$ est utile pour comparer entre elles les performances de différentes approches de spectroscopies (Fabry-Pérot, réseaux, spectroscopie à transformée de Fourier). Cette question sera approfondie dans le préceptorat sur la spectroscopie.

Références

[1] On trouvera une présentation précise et détaillée de la diffraction en optique, incluant de nombreux exemples, dans R.-J. Champeau, R. Carpentier et Y. Lorgeré, *Ondes Lumineuses : Propagation, Optique de Fourier, Cohérence* (de Boeck, Bruxelles, 2009).

Chapitre 8

Optique de Fourier et relation objet-image

Objectifs

- Introduire le formalisme de la théorie des systèmes linéaires pour décrire la formation des images en éclairage cohérent et incohérent.
- Discuter du traitement de l'information (optique cohérente) et de la perte d'information entre objet et image (aberrations, taille de grain, diffraction).

8.1 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert en amplitude

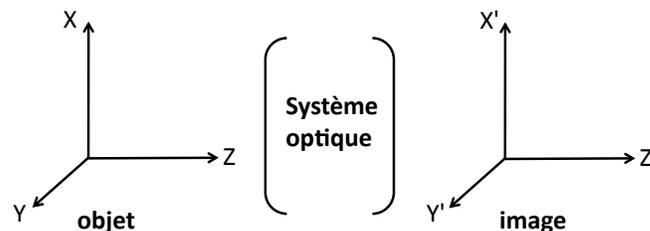


Figure 8.1: Schéma général d'un montage d'imagerie optique.

Dans la situation schématisée sur la figure 8.1, nous supposons vérifiées les conditions d'*aplanétisme* (l'image d'un objet plan est plane) et d'*isoplanétisme* (formation de l'image invariante par translation dans un plan perpendiculaire à l'axe optique Oz). La linéarité des équations de propagation de l'amplitude complexe du champ permet d'écrire une relation linéaire entre l'amplitude

$E_i(x', y')$ dans le plan image et l'amplitude $A_o(x, y)$ dans le plan objet :

$$E_i(x', y') = \iint g(x', y', x, y) A_o(x, y) dx dy \quad (8.1)$$

Dans le cadre de l'optique géométrique, on aurait simplement

$$E_i(x', y') = \frac{1}{|\gamma|} A_o\left(\frac{x'}{\gamma}, \frac{y'}{\gamma}\right)$$

avec γ le grandissement du système optique, ce qui correspond donc à

$$g(x', y', x, y) = \frac{1}{|\gamma|} \delta\left(x - \frac{x'}{\gamma}, y - \frac{y'}{\gamma}\right)$$

On peut alors effectuer le changement de variables :

$$\bar{x} = \gamma x, \quad \bar{y} = \gamma y$$

L'expression (8.1) devient alors

$$\begin{aligned} E_i(x', y') &= \iint g(x', y', \bar{x}, \bar{y}) A_o(\bar{x}, \bar{y}) \frac{1}{\gamma^2} d\bar{x} d\bar{y} \\ &= \iint \frac{1}{|\gamma|} g(x', y', \bar{x}, \bar{y}) \frac{1}{|\gamma|} A_o(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \end{aligned}$$

On peut alors introduire $h(x' - \bar{x}, y' - \bar{y}) = (1/|\gamma|) g(x', y', \bar{x}, \bar{y})$ la *réponse impulsionnelle* du système optique, qui est invariante par translation du fait de l'hypothèse d'isoplanétisme, et $E_o(\bar{x}, \bar{y}) = (1/|\gamma|) A_o(\bar{x}, \bar{y})$ qui est l'image géométrique de l'objet prenant en compte le grandissement. Finalement, on écrit la relation linéaire objet-image en amplitude sous la forme :

$$E_i(x', y') = \iint h(x' - x, y' - y) E_o(x, y) dx dy \quad (8.2)$$

Il faut bien garder à l'esprit que dans cette formulation $E_o(x, y)$ est l'amplitude qui serait obtenue dans le cadre de l'optique géométrique (on n'a donc pas à se soucier du grandissement). On a une écriture sous forme d'un produit de convolution, avec une réponse impulsionnelle $h(x, y)$. Cette réponse décrit la déformation de l'image par rapport à une image géométrique parfaite (cette déformation résulte des aberrations et de la diffraction).

En passant dans l'espace de Fourier (par rapport aux variables d'espace x et y), la relation (8.2) devient :

$$\tilde{E}_i(\alpha, \beta) = \tilde{h}(\alpha, \beta) \tilde{E}_o(\alpha, \beta) \quad (8.3)$$

Cette relation définit la *fonction de transfert* en amplitude $\tilde{h}(\alpha, \beta)$, transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$\tilde{h}(\alpha, \beta) = \iint h(x, y) \exp(-i\alpha x - i\beta y) dx dy \quad (8.4)$$

8.2 Eclairage cohérent et incohérent

Lorsque l'on cherche la relation objet-image en terme d'intensité, l'état de cohérence du champ dans le plan objet joue un rôle important comme nous allons le voir.

8.2.1 Eclairage cohérent

Les conditions d'éclairage cohérent sont réalisées par exemple en utilisant un faisceau laser collimaté monochromatique. On a alors une cohérence spatiale et temporelle parfaite dans tout le plan objet. L'intensité $I_i(x', y') = |E_i(x', y')|^2$ dans le plan image s'écrit alors :

$$I_i(x', y') = \left| \iint h(x' - x, y' - y) E_o(x, y) dx dy \right|^2 \quad (8.5)$$

Le système optique est *linéaire en amplitude*, mais pas en intensité.

8.2.2 Eclairage incohérent

Dans le cas d'un éclairage incohérent (obtenu par exemple avec une source blanche étendue), l'intensité observée est moyennée sur les fluctuations temporelles de la source (voir chapitre 1). On notera cette moyenne $\langle \dots \rangle$. On a donc :

$$\begin{aligned} I_i(x', y') &= \left\langle \left| \iint h(x' - x, y' - y) E_o(x, y) dx dy \right|^2 \right\rangle \\ &= \iiint \iiint h(x' - x_1, y' - y_1) h^*(x' - x_2, y' - y_2) \langle E_o(x_1, y_1) E_o^*(x_2, y_2) \rangle dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned}$$

Un éclairage spatialement incohérent dans le plan objet signifie que la condition suivante est réalisée :

$$\langle E_o(x_1, y_1) E_o^*(x_2, y_2) \rangle = K I_o(x_1, y_1) \delta(x_1 - x_2) \delta(y_1 - y_2)$$

où K est une constante qu'on ne précise pas et $I_o(x_1, y_1) = |E_o(x_1, y_1)|^2$ est la distribution spatiale de l'intensité dans le plan objet. L'intensité dans le plan image devient alors :

$$I_i(x', y') = K \iint |h(x' - x, y' - y)|^2 I_o(x, y) dx dy \quad (8.6)$$

Le système optique est donc *linéaire en intensité*, avec une réponse impulsionnelle $H(x, y) = K |h(x, y)|^2$.

8.3 Formation et traitement des images en éclairage cohérent

8.3.1 Transformation de Fourier par une lentille

Dans le plan focal image d'une lentille convergente, on a rigoureusement les conditions de champ lointain. L'amplitude complexe du champ en un point de ce plan est donc proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale de l'amplitude complexe du champ dans le plan objet.

On peut s'en convaincre qualitativement en utilisant le développement en ondes planes du champ juste après le plan objet choisi comme étant le plan $z = 0$, et en raisonnant pour simplifier en géométrie 2D (voir figure 8.2). Le développement s'écrit :

$$E(x, z) = \int \tilde{E}_o(\alpha, z = 0) \exp(i\alpha x + i\gamma z) \frac{d\alpha}{2\pi}$$

avec $\alpha^2 + \gamma^2 = k^2$ et $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Une onde plane du développement correspond à une direction de propagation repérée par $\alpha = k \sin \theta \simeq k \theta$ dans les conditions de Gauss. Une direction de propagation θ correspond à un point dans le plan focal image (le point M de la figure 8.2). Donc au point x' du plan image tel que $x' = f \theta$, on a une amplitude proportionnelle à $\tilde{E}_o(\alpha, z = 0)$ avec $\alpha = k \theta = k x'/f$.

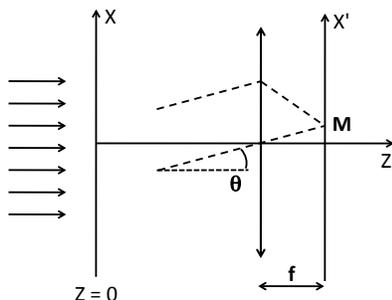


Figure 8.2: Tracé de rayons permettant de comprendre qualitativement l'opération de transformation de Fourier par une lentille convergente.

On peut montrer que si le plan objet coïncide avec le plan focal objet de la lentille, alors dans le plan image on a rigoureusement une amplitude égale à la transformée de Fourier du champ dans le plan objet (pour une démonstration voir [1]).

8.3.2 Montage "4f"

Ce montage qui est très utilisé pour le traitement des images en optique cohérente est représentée sur la figure 8.3.

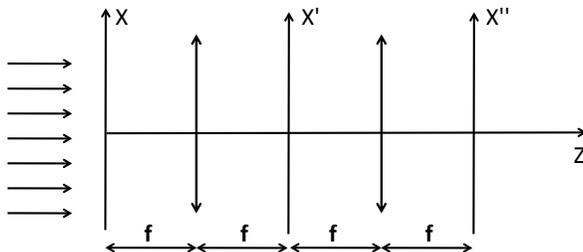


Figure 8.3: Montage dit "4f" utilisé en optique cohérente. Le plan image de la première lentille est également le plan objet de la seconde lentille. Il est communément appelé plan de Fourier.

Dans le plan image de la première lentille, appelé *plan de Fourier*, on peut observer et même modifier la transformée de Fourier du champ dans le plan objet. La seconde lentille effectue une autre transformation de Fourier, assimilée à une transformation de Fourier inverse (au signe près de x ce qui correspond à une inversion de l'image). On peut donc observer l'image après traitement éventuel dans le plan de Fourier. En optique cohérente, la transformée de Fourier a donc une signification concrète, la transformée de Fourier de l'objet étant quelque chose que l'on peut manipuler.

8.3.3 Filtrage dans le plan de Fourier. Traitement optique des images

En agissant dans le plan de Fourier, on peut filtrer les fréquences spatiales avant d'effectuer la transformation de Fourier inverse. On peut ainsi effectuer un traitement des images "tout optique". Nous allons détailler quelques exemples (voir [1,2] pour une présentation plus avancée).

Filtrage passe-haut : strioscopie

Dans certaines situations, on peut chercher à observer des objets se comportant comme des objets de phase et générant un faible contraste en imagerie directe (exemple : cellule biologique, écoulement de gaz). De tels objets se modélisent par une transmission en amplitude $t(x, y) = \exp[i\phi(x, y)] \simeq 1 + i\phi(x, y)$. L'observation directe de l'intensité donnerait $I_i(x, y) = 1 + \phi^2(x, y)$ avec $\phi^2(x, y) \ll 1$ et donc un contraste négligeable.

Plan de Fourier

On observe une amplitude donnée par

$$\text{TF}[t(x, y)] = \delta(\alpha) \delta(\beta) + i\tilde{\phi}(\alpha, \beta)$$

avec $\alpha = kx'/f$ et $\beta = ky'/f$. En plaçant un cache au centre, on supprime la tache centrale modélisée ici par le premier terme (en pratique on a une tache et pas un point du fait des aberrations et de la diffraction). En termes d'analyse de systèmes linéaires, ceci revient à filtrage passe-haut (on coupe les basses fréquences correspondant ici au fond continu de l'image).

Plan image

Après la seconde transformation de Fourier (transformation inverse), on a une amplitude donnée par

$$\text{TF}^{-1}[i\tilde{\phi}(\alpha, \beta)] = i\phi(x, y)$$

On obtient donc dans le plan image une intensité $I_i(x'', y'') = |\phi(x, y)|^2$ qui permet de visualiser le contraste dû à l'objet de phase.

Contraste de phase

Une autre approche consiste à placer au centre du plan de Fourier non pas un cache opaque mais une lame transparente qui déphase de $\pi/2$.

Plan de Fourier

On génère ainsi une amplitude

$$i\delta(\alpha) \delta(\beta) + i\tilde{\phi}(\alpha, \beta)$$

Plan image

Après la seconde transformation de Fourier, on a une amplitude donnée par

$$\text{TF}^{-1}[i\delta(\alpha)\delta(\beta) + i\tilde{\phi}(\alpha, \beta)] = i[1 + \phi(x, y)]$$

L'intensité dans le plan image est donc $I_i(x'', y'') = |1 + \phi(x, y)|^2 \simeq 1 + 2\phi(x, y)$. On obtient ainsi une image à la fois lumineuse et contrastée. Cette idée est à l'origine du développement de la microscopie à contraste de phase par Zernike (qui lui a valu le prix Nobel de physique en 1953).

Filtrage adapté

Pour un champ dans le plan objet donné $E_o(x, y)$, le filtre adapté est $\tilde{E}_o^*(\alpha, \beta)$. En appliquant ce filtre dans le plan de Fourier, on compense exactement tous les déphasages et on obtient un front d'onde plan. Dans le plan image, on obtient donc une tache autour du point focal (limitée par les aberrations et la diffraction).

Nous verrons comment créer un filtre adapté, et comment l'utiliser dans des opérations de reconnaissance de forme au chapitre 9.

8.4 Formation des images en éclairage incohérent

Dans le cas de l'éclairage incohérent, la transformée de Fourier spatiale du champ dans le plan objet ne peut pas s'observer directement. Elle est cependant utile à la modélisation du processus de formation de l'image. On peut bien sûr calculer numériquement la transformée de Fourier de la distribution d'intensité dans l'image pour du post-traitement, mais il s'agit d'une opération qui n'a rien à voir avec la propagation optique elle-même.

Un système optique en éclairage incohérent est linéaire en intensité et décrit par la relation générale

$$I_i(x', y') = \iint H(x' - x, y' - y) I_o(x, y) dx dy \quad (8.7)$$

ou par son équivalent dans l'espace de Fourier

$$\tilde{I}_i(\alpha, \beta) = \tilde{H}(\alpha, \beta) \tilde{I}_o(\alpha, \beta) \quad (8.8)$$

La grandeur $\tilde{H}(\alpha, \beta)$ est appelée *fonction de transfert optique* (FTO)¹. Physiquement, elle s'interprète comme l'image d'un point source d'intensité unité.

Un exemple de système d'imagerie : le rétroprojecteur

L'expérience que l'on peut réaliser facilement (faite en cours) consiste à projeter une mire concentrique comme celle représentée sur la figure 8.4. Ceci permet de visualiser directement l'effet de filtrage des fréquences spatiales (pour un rayon donné, la mire est un objet périodique, la

¹Son module $|\tilde{H}(\alpha, \beta)|$ est appelé *fonction de transfert de modulation*.

fréquence spatiale augmentant lorsque l'on se rapproche du centre). Dans le cas du défaut de mise au point, on observe pour certains rayons une perte de contraste, qui correspond à une annulation de la FTO. L'allure de la FTO fait bien apparaître un zéro, et même plusieurs zéros lorsque la défaut de mise au point devient de plus en plus sévère.

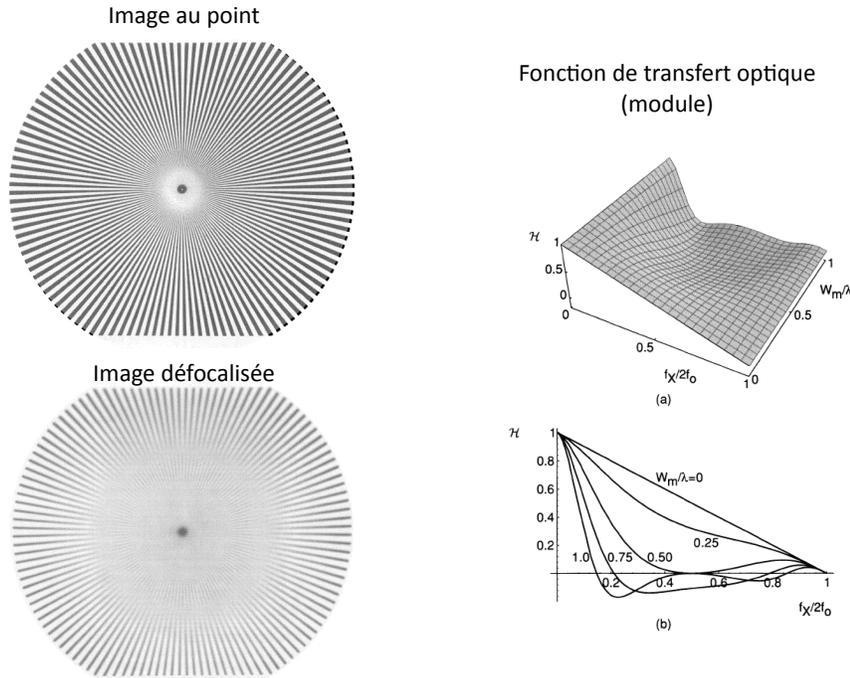


Figure 8.4: Illustration du filtrage produit par un système fonctionnant en éclairage incohérent (rétroprojecteur). Gauche : mire projetée avec l'appareil au point (haut) et en présence d'un défaut de mise au point (bas). Droite : Allure de la fonction de transfert optique (FTO) en fonction de la fréquence spatiale $f_x = \alpha/(2\pi)$ normalisée par $2f_0$ avec $f_0 = 1/\lambda$, et pour un défaut de mise au point de plus en plus sévère (mesuré par la longueur W_m). D'après [1].

On peut modéliser de manière simple le défaut de mise au point en raisonnant en géométrie 1D. En référence au schéma de la figure 8.5, l'image d'un point source en présence d'un défaut de mise au point est une tache dont l'étendue est décrite par une fonction $D(x')$, que l'on modélise par une fonction rectangle de largeur a . Pour un rayon donné de la mire, l'intensité objet est périodique de période p et nous l'assimilons à une fonction sinusoïdale.

Dans l'espace direct, l'intensité dans le plan objet est $I_o(x) = 1 + \cos(2\pi x/p)$. L'image s'obtient en effectuant le produit de convolution de cette intensité par la fonction $D(x')$ (image d'un point source), ce qui donne

$$I_i(x') = 1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi a}{p}\right) \cos\left(\frac{2\pi x'}{p}\right)$$

Dans l'espace de Fourier, on peut mener un raisonnement équivalent. La transformée de Fourier de la distribution d'intensité est $\text{TF}[I_o(x)] \propto \delta(\alpha) + \delta(\alpha - 2\pi/p)/2 + \delta(\alpha + 2\pi/p)/2$. La transformée

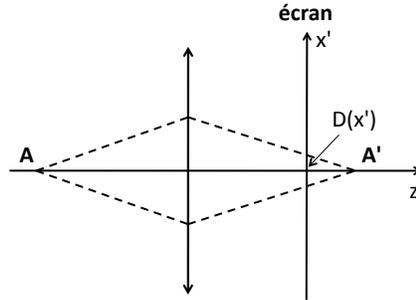


Figure 8.5: Modèle simple utilisé pour décrire le défaut de mise au point. La tache produite sur l'écran par un point source est décrite par la fonction $D(x')$.

de Fourier de la fonction rectange $D(x')$ est $\text{TF}[D(x')] \propto \text{sinc}(\alpha a/2)$. La transformée de Fourier de la distribution d'intensité dans le plan image est le produit de ces deux transformées de Fourier :

$$\text{TF}[I_i(x')] = \text{sinc}\left(\frac{\alpha a}{2}\right) \left[\delta(\alpha) + \frac{1}{2} \delta\left(\alpha - \frac{2\pi}{p}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\alpha + \frac{2\pi}{p}\right) \right]$$

On remarque que :

- Si $\frac{2\pi}{p} \ll \frac{2\pi}{a}$, on affecte peu l'image (les basses fréquences spatiales sont peu modifiées).
- Si $p = a$, le contraste s'annule.
- Si $\frac{2\pi}{a} < \frac{2\pi}{p} < \frac{4\pi}{a}$, le contraste est inversé (changement de signe de la FTO).

Ce modèle simple explique l'essentiel des observations faites sur la mire concentrique 2D (pour laquelle on rappelle que fixer une fréquence spatiale $2\pi/p$ revient à fixer le rayon).

8.5 Systèmes limités par la diffraction

Pour un système optique corrigé en aberrations, c'est la diffraction qui impose la limite ultime en termes de résolution et de contraste. C'est le cas pour le microscope, le télescope, ou encore l'oeil humain qui est très proche de cette limite.

8.5.1 Origine physique de la limite de résolution

La notion de résolution spatiale d'un système d'imagerie est liée à son aptitude à séparer deux objets (à ne pas confondre avec la notion de sensibilité qui se rapporte à l'aptitude à détecter un objet le plus petit ou le moins lumineux possible). Afin d'illustrer l'origine physique de la limite de résolution, considérons la situation de la figure 8.6, dans laquelle deux fentes infiniment minces dans un écran opaque sont imagées par un système optique (par exemple un microscope).

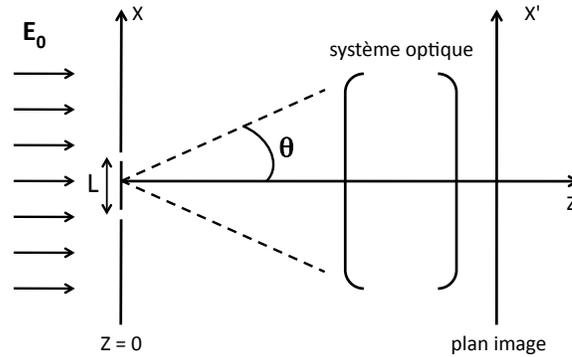


Figure 8.6: Schéma d'un système d'imagerie de deux fentes infiniment minces séparées d'une distance L . L'aptitude du système optique à produire une image permettant de séparer les deux fentes définit sa résolution spatiale.

La champ dans le plan $z = 0$ (plan des fentes) se modélise par

$$E(x, z = 0) = A \delta(x - L/2) + B \delta(x + L/2)$$

où L est l'espacement entre les deux fentes et $\delta(\dots)$ la distribution de Dirac. Les amplitudes A et B sont des amplitudes complexes qu'on ne précise pas (et qui dépendent de l'éclairage incident). Nous supposons que le système d'imagerie collecte toutes les ondes se propageant dans les directions contenues dans le cône de demi-angle θ , et qu'il produit dans le plan image un champ $E_i(x')$ qui reproduit le champ objet à partir de ces ondes collectées. On a donc :

$$E_i(x') = \int_{-\alpha_{max}}^{+\alpha_{max}} \tilde{E}(\alpha, z = 0) \exp(i\alpha x') \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (8.9)$$

avec $\alpha_{max} = k \sin \theta$, et $k = n\omega/c = 2\pi n/\lambda$, n étant l'indice du milieu de propagation avant l'entrée du système optique. La transformée de Fourier du champ objet dans le plan $z = 0$ est

$$\tilde{E}(\alpha, z = 0) = A \exp(i\alpha L/2) + B \exp(-i\alpha L/2)$$

On obtient donc tous calculs faits :

$$E_i(x') = \frac{2A\alpha_{max}}{\pi} \text{sinc} [\alpha_{max}(x' + L/2)] + \frac{2B\alpha_{max}}{\pi} \text{sinc} [\alpha_{max}(x' - L/2)] \quad (8.10)$$

En observant dans le plan image, on peut chercher à quelle condition il est possible de séparer les deux fentes. Si l'on suppose que les deux fentes sont éclairées de manière *incohérente* et avec la même intensité (c'est à dire que A et B ont des phases qui fluctuent aléatoirement l'une par rapport à l'autre, tout en ayant $|A| = |B|$), alors la figure d'intensité est simplement :

$$I_i(x') = \frac{4|A|^2\alpha_{max}^2}{\pi^2} \{ \text{sinc}^2 [\alpha_{max}(x' + L/2)] + \text{sinc}^2 [\alpha_{max}(x' - L/2)] \} \quad (8.11)$$

Lorsque la distance L entre les deux fentes diminue, les deux figures de diffraction (décrites ici par les fonctions sinc) tendent à se recouvrir de plus en plus, jusqu'à ne plus pouvoir être distinguées

l'une de l'autre. Lorsqu'il n'est plus possible de distinguer les deux figures de diffraction, on ne peut plus discerner les deux fentes. Pour déterminer la limite de résolution, on doit utiliser un critère (la définition de la limite de résolution a donc une part d'arbitraire). On utilise couramment le critère de Rayleigh illustré sur la figure 8.7 (et que nous avons déjà utilisé au chapitre 7). Dans le cas des deux fonctions sinc de l'Eq. (8.11), le critère de Rayleigh correspond

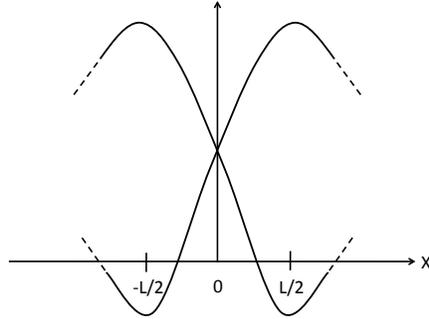


Figure 8.7: Illustration du critère de Rayleigh. La limite de résolution est atteinte lorsque le maximum de l'une des tache de diffraction coïncide avec le minimum de l'autre.

à $\alpha_{max} L = \pi$. La plus petite distance L entre les deux fentes qui permet de les résoudre est donc

$$L = \frac{\lambda}{2n \sin \theta} \quad (8.12)$$

Ce résultat est connu sous le nom de formule d'Abbe (que nous avons déjà vue au chapitre 7, avec un facteur 1,22 qui est présent en géométrie 3D avec une pupille circulaire). La formule d'Abbe donne la limite de résolution spatiale d'un microscope optique (ou de tout instrument d'imagerie limité par la diffraction). On parle de *limite de diffraction*.

Remarque : le groupement $n \sin \theta$ est l'*ouverture numérique* du microscope, notée ON . La limite de résolution spatiale s'exprime donc aussi sous la forme $L = \lambda/(2ON)$.

Il faut retenir de ce calcul de figure de diffraction que c'est la plus grande fréquence spatiale collectée par l'instrument α_{max} qui limite la résolution. Nous avons déjà trouvé ce résultat qualitativement au chapitre 6 à partir du développement en ondes planes et de la relation de transformée de Fourier $\Delta x \alpha_{max} \simeq 2\pi$, relation qui à elle seule décrit l'essentiel du phénomène de diffraction.

8.5.2 Fonction de transfert en amplitude (éclairage cohérent)

La plus haute fréquence spatiale α_{max} qui va contribuer à la formation de l'image est fixée par la pupille de l'instrument dans le plan de Fourier. Par exemple pour un microscope utilisant un objectif d'ouverture numérique $ON = n \sin \theta$, on a $\alpha_{max} = (2\pi/\lambda)ON$. La fonction de transfert en amplitude, notée $\tilde{h}(\alpha)$, est donc une fonction rectangle, comme représentée sur la figure 8.8 (gauche) dans un cas d'un système formant une image à une dimension. Cette fonction de transfert est celle qui intervient dans la formation des images en éclairage cohérent. La plus

grande fréquence spatiale accessible est $\alpha_{max} = (2\pi/\lambda)ON$ (ou $f_{max} = ON/\lambda$ si l'on raisonne vraiment sur des fréquences et pas des pulsations).

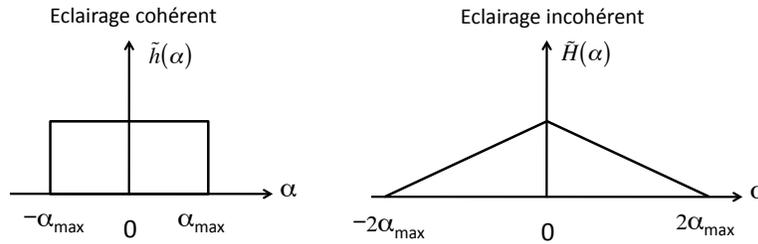


Figure 8.8: Gauche : allure de la fonction de transfert en amplitude (éclairage cohérent) dans le cas d'une image 1D. Droite : allure de la fonction de transfert en éclairage incohérent.

En géométrie 3D (image à deux dimensions), la fonction de transfert en amplitude a l'allure représentée sur la figure 8.9.

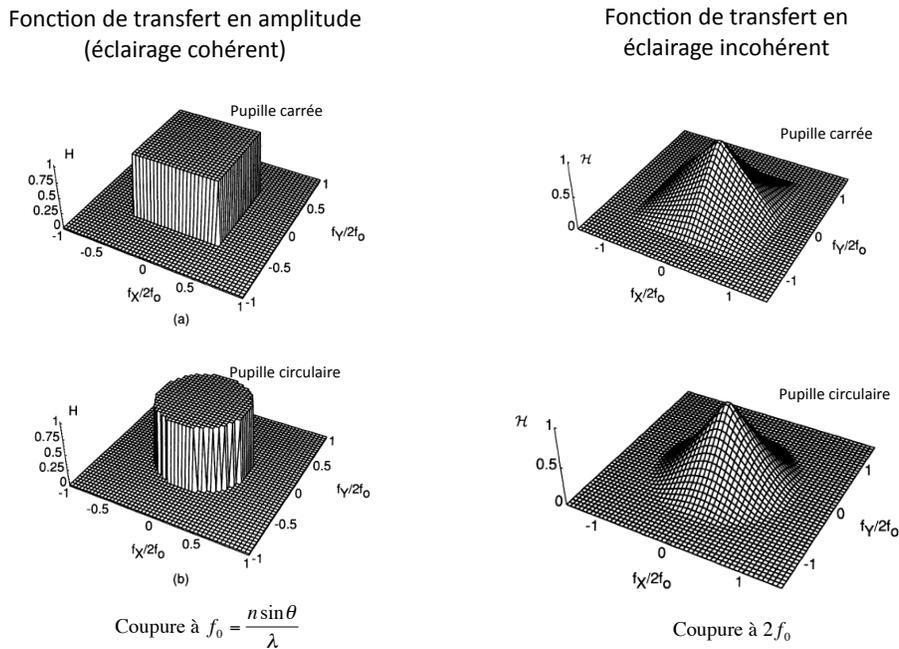


Figure 8.9: Représentation des fonction de transfert en éclairage cohérent et incohérent, pour une pupille carrée et une pupille circulaire. On note $f_0 = n \sin \theta / \lambda = ON/\lambda$.

8.5.3 Fonction de transfert en éclairage incohérent

La fonction de transfert en éclairage incohérent, dite aussi *fonction de transfert optique*, est $\tilde{H}(\alpha) = K \tilde{h}(\alpha) \otimes \tilde{h}(\alpha)$, où \otimes désigne le produit de convolution. Ce résultat est une conséquence

du fait que la réponse impulsionnelle en éclairage incohérent est le carré de la réponse impulsionnelle en amplitude (voir Eq. 8.6). Le résultat du produit de convolution d'une fonction rectangle avec elle-même est une fonction triangle, comme représenté sur la figure 8.8 (droite) pour un système formant une image à une dimension. On observe une fréquence de coupure $2\alpha_{max} = (4\pi/\lambda)ON$ (ou $2f_{max} = 2ON/\lambda$). On a par contre une perte de contraste progressive, contrairement au cas de l'éclairage cohérent où toutes les fréquences spatiales jusqu'à α_{max} contribuent avec le même poids.

Dans le cas de la géométrie 3D, la fonction de transfert en éclairage incohérent est représentée sur la figure 8.9.

Remarque : il ne faut pas conclure que la résolution spatiale est deux fois meilleure en éclairage incohérent. Pour comparer, il faut considérer l'intensité dans les deux cas d'éclairage, ce qui fait apparaître des termes d'interférences dans le cas cohérent. Il n'y a pas de résultat général.

Références

- [1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd edition (McGraw Hill, New York, 1996). Existe en français : J.W. Goodman, *Introduction à l'Optique de Fourier* (Masson, Paris, 1972).
- [2] K. Iizuka, *Engineering Optics*, 3rd edition (Springer Verlag, Berlin, 2008).

Chapitre 9

Holographie

Objectifs

- Décrire le principe de l'holographie et les caractéristiques des hologrammes.
- Discuter quelques exemples d'applications.

9.1 Introduction

L'objectif de l'holographie est de synthétiser une onde (amplitude complexe) qui est celle d'une scène qu'un observateur pourrait par ailleurs observer directement. La synthèse est faite dans un plan (plus précisément une portion de plan). Dans ce plan, il faut que l'amplitude complexe du champ soit identique à celle que produirait la scène dans le même plan. La propagation dans l'espace libre au-delà du plan produit alors une onde qui est identique à celle qui serait émise par la scène. On peut ainsi reconstituer *totalemment* l'information de la scène (holographie signifie "image totale").

Quelle différence entre l'hologramme d'une scène, observée par exemple derrière une vitre, et une photographie de cette même scène ? La photographie, si on la place dans le plan de la vitre, nous permet de voir les éléments de la scène tels qu'ils ont été projetés sur le plan image de l'appareil photo en passant par l'objectif. L'hologramme, enregistré dans le plan de la vitre et restitué à partir de ce même plan, nous permet d'observer la scène réelle, et par exemple de nous déplacer pour observer les différentes perspectives et même des parties de la scène qui pouvaient être masquées sur la photographie.

9.2 Principe de l'holographie

En optique les détecteurs sont sensibles au module au carré du champ, et ne permettent pas d'enregistrer directement amplitude et phase, ou de suivre le champ dans le temps comme en acoustique. Afin d'enregistrer la distribution spatiale de l'amplitude complexe de l'onde émise par un objet, il faut utiliser des interférences entre l'onde objet et une onde de référence. On

utilise des sources cohérentes (spatialement et temporellement) afin de produire des figures d'interférences de bonne qualité. Le schéma de principe de la phase d'enregistrement d'un hologramme est représenté sur la figure 9.1. La figure d'interférence est enregistrée sur une plaque photosensible (plaque photographique par exemple, mais il existe d'autres supports possibles).

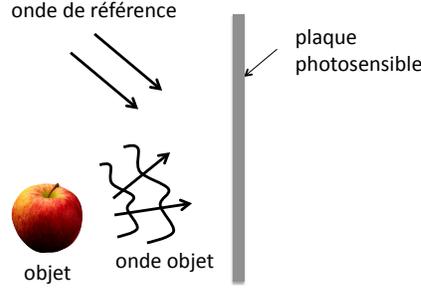


Figure 9.1: Principe de l'enregistrement d'un hologramme. L'onde de référence est cohérente avec l'onde objet et forme une figure d'interférence sur la plaque photosensible.

9.2.1 Enregistrement

Notons $O(x, y) = o(x, y) \exp[i\phi(x, y)]$ l'amplitude complexe de l'onde objet dans le plan de la plaque photosensible, et $R(x, y) = r(x, y) \exp[i\psi(x, y)]$ celle de l'onde de référence que l'on assimile à une onde plane (ces deux ondes doivent être cohérentes entre elles, et proviennent en général d'un même laser). L'onde objet est celle que l'on souhaite pouvoir reproduire ensuite, et l'onde de référence sert à réaliser les interférences afin de coder la phase de l'onde objet dans une figure d'intensité. L'intensité produite dans le plan de la plaque photosensible est

$$I(x, y) = |O(x, y) + R(x, y)|^2 = |O(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2 + O(x, y)R^*(x, y) + R(x, y)O^*(x, y) \quad (9.1)$$

Nous nous plaçons dans des conditions telles que le facteur de transmission *en amplitude* $t(x, y)$ de la plaque photosensible qui enregistre l'intensité (après développement s'il s'agit d'une plaque photographique) soit proportionnel à l'intensité :

$$t(x, y) = \beta I(x, y) \quad (9.2)$$

Les conditions pour obtenir cette réponse linéaire de la transmission en amplitude avec l'intensité incidente dépendent de l'éclairement et des caractéristiques de la plaque photosensible.

9.2.2 Restitution

Dans la phase de restitution, on place la plaque photosensible dans le même plan et on l'éclaire avec l'onde de référence uniquement. L'amplitude dans un plan juste après la plaque s'écrit :

$$t(x, y) R(x, y) = \beta [(|O(x, y)|^2 + |R(x, y)|^2) R(x, y) + |R(x, y)|^2 O(x, y) + R^2(x, y) O^*(x, y)] \quad (9.3)$$

- Le premier terme est simplement l'onde de référence modulée spatialement par le terme $(|O|^2 + |R|^2)$.
- Le deuxième terme $|R(x, y)|^2 O(x, y)$ est l'onde objet, multipliée par l'intensité de l'onde de référence. Si l'on s'arrange pour que l'onde de référence ait une intensité uniforme dans la zone d'enregistrement, alors ce terme reconstruit bien l'onde objet en amplitude et en phase. On réalise bien ainsi la synthèse de l'amplitude complexe de l'onde objet.
- Le troisième terme $R^2(x, y) O^*(x, y)$ est lui proportionnel à l'onde objet conjuguée. Il est intéressant de remarquer que si l'on éclaire la plaque avec l'onde de référence conjuguée $R^*(x, y)$, alors ce terme devient $|R(x, y)|^2 O^*(x, y)$. En utilisant une onde de référence d'intensité uniforme, on reconstruit alors l'onde conjuguée de l'onde objet. En régime monochromatique, cette conjugaison est l'analogue de l'opération de retournement temporel que l'on peut réaliser de manière directe en acoustique. Elle a donc les propriétés de l'onde retournée temporellement qui ont été discutées dans le cours *Ondes et Acoustique* (par exemple une onde divergente est transformée en une onde convergente qui va focaliser). La restitution des ondes objet et conjuguée est représentée sur la figure 9.2.

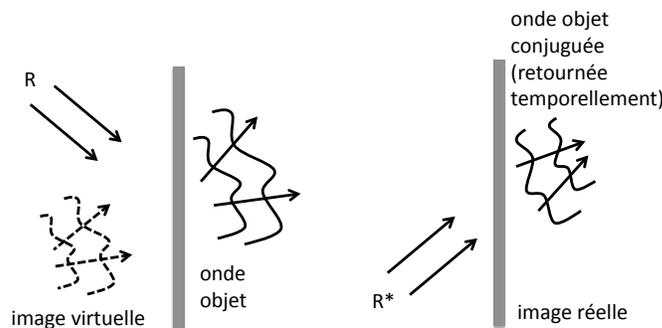


Figure 9.2: Restitution de l'hologramme. Gauche : l'éclairement par l'onde de référence crée en transmission l'onde objet. L'observateur perçoit une image virtuelle de l'objet. Droite : l'éclairement par l'onde de référence conjuguée produit une onde transmise conjuguée de l'onde objet, qui focalise et produit une image réelle. L'onde conjuguée correspond à l'onde objet retournée temporellement.

Lorsque l'objectif est de synthétiser l'onde objet initiale, les premier et troisième termes sont gênants car ils interfèrent avec le deuxième terme que l'on cherche à isoler. Nous allons voir comment séparer les termes, en commençant par le cas simple de l'hologramme d'un point source.

9.3 Hologramme d'un point source

9.3.1 Calcul de l'hologramme

En référence à la géométrie de la figure 9.3, raisonnons sur le cas idéal de l'hologramme d'un point source S_O , enregistré avec l'onde de référence provenant d'un point source symétrique

S_R . On suppose les deux sources placées en champ lointain du plan de l'hologramme (plan $z = 0$), de telle sorte que les ondes produites dans le plan de l'hologramme soient assimilables localement à des ondes planes.

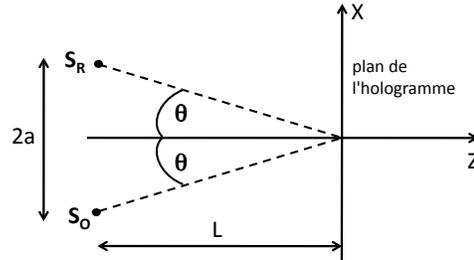


Figure 9.3: Enregistrement de l'hologramme d'un point source S_O placé à grande distance $L \gg a$ du plan de la plaque photosensible.

Dans le plan de l'hologramme et au voisinage de l'axe (Oz), les amplitudes complexes des ondes objet et de référence s'écrivent :

$$\begin{aligned} O(x) &= A \exp(ikx \sin \theta) \\ R(x) &= A \exp(-ikx \sin \theta) \end{aligned}$$

avec $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$. L'amplitude A qu'on ne précise pas est supposée constante dans la fenêtre d'enregistrement. Après développement de la plaque photosensible, le facteur de transmission en amplitude de l'hologramme est donc

$$t(x) = \beta|O(x) + R(x)|^2 = 2\beta|A|^2 + \beta|A|^2 \exp(2ikx \sin \theta) + \beta|A|^2 \exp(-2ikx \sin \theta) \quad (9.4)$$

Lorsque l'on éclaire l'hologramme avec l'onde de référence (voir figure 9.4), on obtient une amplitude transmise juste après le plan $z = 0$ de la forme :

$$R(x)t(x) = 2\beta|A|^2 A \exp(-ikx \sin \theta) + \beta|A|^2 A \exp(ikx \sin \theta) + \beta|A|^2 A \exp(-3ikx \sin \theta)$$

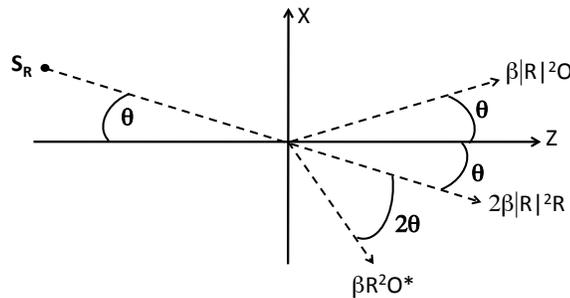


Figure 9.4: Restitution de l'hologramme éclairé par l'onde de référence. On observe trois ondes émergeant dans trois directions différentes. On a indiqué sur la figure l'amplitude de chacune des ondes.

On a donc en transmission trois ondes planes avec trois angles d'émergence différents $-\theta$, θ et -3θ , comme indiqué sur la figure 9.4 (on suppose $\sin \theta \simeq \theta$ car $L \gg a$). Ce sont les trois ondes attendues dont nous avons discuté dans la section précédente : onde de référence multipliée par $\beta(|O|^2 + |R|^2)$, onde objet reconstruite et onde conjuguée.

9.3.2 Analogie avec la diffraction par un réseau

La transmission en amplitude $t(x)$ donnée par l'Eq. (9.4) peut se réécrire sous la forme :

$$t(x) = 2\beta|A|^2 [1 + \cos(2kx \sin \theta)] \quad (9.5)$$

On peut donc voir la phase de restitution comme la diffraction de l'onde de référence par un réseau sinusoïdal de transmission en amplitude $t(x)$. Les trois ondes observées en transmission correspondent aux trois ordres de diffraction $m = -1, 0, +1$.

De cette analogie avec les réseaux nous pouvons tirer quelques conclusions.

Influence de la longueur d'onde

Que se passe-t-il si on enregistre l'hologramme avec une onde de longueur d'onde λ et que l'on observe avec une longueur d'onde λ' ? L'angle d'émergence θ' de l'onde objet sera défini par une relation du type $\sin \theta' = m\lambda'/p$ (avec p la période du réseau) plutôt que par $\sin \theta = m\lambda/p$. Dans le cas d'un objet étendu, on verra l'objet sous un angle multiplié par λ'/λ (approximativement).

C'est en fait l'idée initiale de Gabor (qui a obtenu le prix Nobel de physique en 1971 pour la découverte de l'holographie, proposée initialement en 1948). Dans les années 1950, c'est-à-dire avant l'invention du laser, il voulait "voir" des molécules ou des atomes en prenant un hologramme avec des rayons X ($\lambda \simeq 0,1$ nm, mais il faut une source de rayons X cohérente).

Les problèmes de la plaque photographique

Nous avons supposé un noircissement de la plaque qui varie linéairement avec l'intensité reçue. Cela n'est vrai que dans un intervalle où l'illumination (produit de l'éclairement par le temps de pose) est correcte, c'est-à-dire où il n'y a pas sous-exposition (réponse au-dessous d'un seuil) ou sur-exposition (réponse saturée). La non linéarité de la réponse créera des harmoniques (spatialement) de la réponse sinusoïdale attendue donc un bruit, c'est-à-dire des signaux qui vont se "mélanger" avec l'onde objet.

Réseaux épais

Les hologrammes (ou les réseaux) dont nous avons parlé jusqu'à présent étaient localisés sur un plan. En réalité les gélatines des plaques photographiques que l'on peut utiliser en holographie et qui contiennent les grains d'halogénures d'argent ont une épaisseur (5 à 20 μm) qui est très supérieure à la longueur d'onde de la lumière. Les interférences entre l'onde de référence et l'onde objet vont engendrer des strates correspondant à l'enregistrement d'un réseau de période

Λ telle que $k \sin \theta = 2\pi/\Lambda$ (voir figure 9.5). On a donc $2\Lambda \sin \theta = \lambda$ avec λ la longueur d'onde utilisée à l'enregistrement.

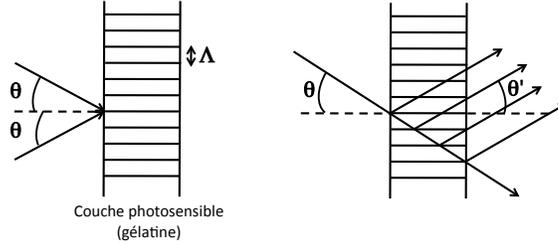


Figure 9.5: Influence de l'épaisseur de la couche photosensible. Analogie avec la diffraction par un réseau épais. Gauche : étape d'enregistrement. Droite : phase de restitution.

Lors de la reconstruction avec une lumière de longueur d'onde λ' , ces strates vont se comporter comme des plans réflecteurs. Pour un angle d'incidence θ (onde de référence), on aura une direction de diffraction θ' donnée par la loi des réseaux pour l'ordre -1 :

$$\sin \theta' = \sin \theta - \lambda'/\Lambda$$

Pour que cette direction θ' coïncide avec la direction de l'onde objet reconstruite, il faut $\theta' = -\theta$, et on obtient donc la condition (loi de Bragg)

$$2\Lambda \sin \theta = \lambda'$$

Cette condition ne peut être vérifiée exactement que si $\lambda' = \lambda$. On a ainsi un système qui va sélectionner une zone spectrale et qui va jouer le rôle de filtre en longueur d'onde. C'est la raison pour laquelle beaucoup d'hologrammes sont visibles avec des sources de lumière blanche et qu'ils apparaissent colorés.

9.4 Réalisation d'un hologramme

Un objectif pratique est de supprimer au mieux les ondes de référence et conjuguée pour n'avoir que l'onde objet lors de la restitution. En appliquant à tous les points de l'objet le raisonnement de la section précédente, il est possible de trouver une géométrie qui réalise à peu près ces conditions.

Entre l'onde de référence et l'onde objet, on a un angle 2θ , et entre l'onde de référence et l'onde conjuguée on a un angle -2θ (figure 9.4). Si $\theta = \pi/4$, c'est-à-dire si l'onde objet fait un angle moyen de $\pi/2$ avec l'onde de référence, l'observateur placé derrière la plaque ne verra que l'onde objet. En effet, l'onde objet reconstruite fera un angle de $\pi/2$ avec l'onde de référence, et l'onde conjuguée un angle de $-\pi/2$ avec l'onde de référence. Ce montage, représenté sur la figure 9.6, est celui de Leith et Upatnieks (1962, deux ans après la réalisation du premier laser).

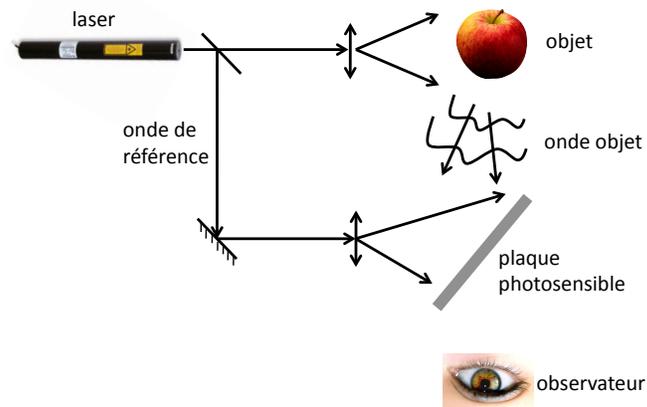


Figure 9.6: Montage de Leith et Upatnieks.

Remarques

- L'onde incidente sur l'objet doit être cohérente spatialement sur toute la scène. La cohérence temporelle du laser utilisé est également un paramètre clé. Il faut une longueur de cohérence temporelle ℓ_{coh} supérieure à la plus grande différence de marche utilisée. Le choix du laser va donc dépendre de la taille de la scène. Pour un grand hologramme (par exemple un sculpture artistique, un véhicule, une poutre de construction) il faut $\ell_{coh} > 1\text{m}$, et également un laser assez puissant pour que les ondes venant de points éloignés puissent impressionner la plaque photosensible à un niveau supérieur à son "bruit".
- Nous avons déjà parlé de la linéarité de la plaque, il faut également que le grain de la plaque soit assez fin pour que les franges puissent être imprimées, donc un grain dont la taille est inférieure au μm . De telles plaques sont très peu sensibles. Il faut poser longtemps et la stabilité mécanique du montage et la stabilité hydrodynamique de l'air environnant doivent être très bonnes pour ne pas induire de fluctuations de différences de marche supérieures à $\lambda/4$ pendant la durée du temps de pose.
- Lorsque l'on éclaire l'hologramme par une onde de référence, nous savons que ce que l'on observe à grande distance est une figure de diffraction dont l'amplitude est la transformée de Fourier de la distribution des amplitudes dans le plan de la fenêtre (ici la plaque photosensible). On peut ainsi réaliser des hologrammes que l'on calcule numériquement puis que l'on transfère sur un support.
- On peut également enregistrer l'hologramme à l'aide d'une caméra CCD, et ensuite traiter l'information numériquement (on peut par exemple rétropropager et reconstruire l'amplitude complexe du champ au niveau de l'objet). On parle d'*holographie numérique*.

9.5 Quelques applications de l'holographie

9.5.1 Interférométrie holographique

Avec l'holographie, il est possible d'enregistrer l'onde émise par un objet, et de la restituer à volonté à des instants ultérieurs. On peut donc utiliser l'hologramme pour faire interférer l'onde objet avec elle-même à des instants différents. C'est le principe de l'interférométrie holographique.

On peut faire cela de deux façons. On peut réaliser une double exposition de la plaque photosensible, la première avec une onde plane comme onde objet O , et la deuxième avec l'objet d'intérêt O' (par exemple un objet de phase comme un gaz avec des variations de densité). Après développement, si on éclaire avec l'onde de référence on va reconstituer O et O' qui vont interférer. On pourra observer des franges localisées sur l'image virtuelle de l'objet (qui dans notre exemple montreront les variations d'indice et donc de densité du gaz).

On peut également enregistrer l'hologramme d'un objet susceptible d'évoluer ensuite (par exemple un objet déformable). Lors d'une exposition ultérieure, on peut faire interférer l'onde émise directement par l'objet avec celle reconstruite par l'hologramme. On fait ainsi interférer l'onde émise par l'objet avec l'onde émise par le même objet antérieurement. Ceci permet de visualiser par exemple le champ de déplacement de la surface d'une plaque en présence d'une onde acoustique, un écoulement de fluide transparent grâce aux variations de pression et donc de densité qui modifient l'indice optique, ou encore la présence d'un défaut suite à une détérioration.

9.5.2 Hologramme de Fourier

Si l'on place l'objet dans le plan focal objet d'une lentille convergente, et la plaque photosensible dans le plan focal image, on réalise un hologramme avec une onde dont l'amplitude complexe $\tilde{O}(\alpha, \beta)$ est la transformée de Fourier spatiale de celle de l'onde objet (voir chapitre 6). L'hologramme a donc une transparence en amplitude

$$t(x, y) = \beta \left[(|\tilde{O}(\alpha, \beta)|^2 + |R(x, y)|^2) + R^*(x, y) \tilde{O}(\alpha, \beta) + R(x, y) \tilde{O}^*(\alpha, \beta) \right] \quad (9.6)$$

avec $\alpha = kx/f$ et $\beta = ky/f$, f étant la distance focale de la lentille. En éclairant la plaque après développement avec l'onde conjuguée de l'onde de référence $R^*(x, y)$, on génère une amplitude transmise juste après la plaque donnée par

$$t(x, y) R^*(x, y) = \beta \left[(|\tilde{O}(\alpha, \beta)|^2 + |R(x, y)|^2) R^*(x, y) + R^{*2}(x, y) \tilde{O}(\alpha, \beta) + |R(x, y)|^2 \tilde{O}^*(\alpha, \beta) \right] \quad (9.7)$$

Le dernier terme est particulièrement intéressant car il permet de générer l'amplitude $\tilde{O}^*(\alpha, \beta)$ qui peut être utile dans des procédés de filtrage en lumière cohérente, comme dans l'exemple ci-dessous. Vis-à-vis d'une onde d'amplitude complexe $O(x, y)$, l'amplitude $\tilde{O}^*(\alpha, \beta)$ constitue le *filtre adapté*.

9.5.3 Reconnaissance de forme

A l'aide du filtre adapté, on peut effectuer une opération de reconnaissance de forme analogique en lumière cohérente. La reconnaissance de forme intervient dans un grand nombre de domaines. Citons par exemple la robotique où les pièces d'un ensemble qui défilent à grande vitesse sur un tapis roulant doivent être triées et orientées avant d'être montées, la lecture automatique qui passe par une reconnaissance de caractères (tri du courrier, numérisation d'ouvrages). Il existe également un grand nombre d'applications militaires, notamment pour l'identification d'objets (avions, bâtiments) dans un paysage complexe. Les méthodes optiques (analogiques) sont en compétitions avec des méthodes utilisant l'intelligence artificielle, les réseaux de neurones, etc. Leur principal atout est leur vitesse et la facilité de parallélisation dans le traitement de l'information.

Un procédé de reconnaissance de forme utilisant un montage "4f" et un filtre adapté est représenté sur la figure 9.7. Supposons que l'on souhaite reconnaître la lettre A dans un texte. Au préalable, il faut créer un filtre adapté selon le processus décrit au paragraphe précédent, en utilisant pour champ de référence un onde plane se propageant avec un angle θ par rapport à l'axe optique, dont l'amplitude est $R(x, y) = R_0 \exp(-ikx \sin \theta) \simeq R_0 \exp(-ikx\theta)$ si θ est petit. L'hologramme de Fourier a alors une transmission en amplitude

$$t(x, y) = \beta \left[(|\tilde{A}(\alpha, \beta)|^2 + R_0^2) + R_0 \exp(ikx\theta) \tilde{A}(\alpha, \beta) + R_0 \exp(-ikx\theta) \tilde{A}^*(\alpha, \beta) \right] \quad (9.8)$$

où $A(x, y)$ est l'amplitude générée par la lettre A et $\tilde{A}(\alpha, \beta)$ sa transformée de Fourier spatiale. Si l'on place ce filtre dans le plan de Fourier du montage "4f", comme indiqué sur la figure 9.7, alors dans ce plan l'amplitude résultante en présence de l'objet à analyser est

$$\begin{aligned} t(x, y) \tilde{O}(\alpha, \beta) &= \beta [(|\tilde{A}(\alpha, \beta)|^2 + R_0^2) \tilde{O}(\alpha, \beta) + R_0 \exp(ikx\theta) \tilde{A}(\alpha, \beta) \tilde{O}(\alpha, \beta) \\ &+ R_0 \exp(-ikx\theta) \tilde{A}^*(\alpha, \beta) \tilde{O}(\alpha, \beta)] \end{aligned} \quad (9.9)$$

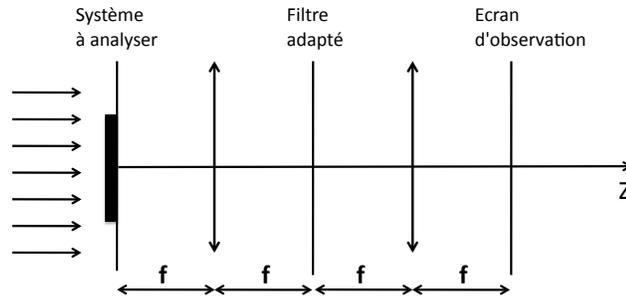


Figure 9.7: Montage "4f" utilisé pour la reconnaissance de forme analogique. On utilise un hologramme de Fourier de l'objet à reconnaître pour réaliser le filtre adapté placé dans le plan de Fourier (plan image de la première lentille).

Le dernier terme est celui qui entre en jeu dans la reconnaissance (il implique le filtre adapté $\tilde{A}^*(\alpha, \beta)$ de la lettre A). Si l'objet est la lettre A , alors $\tilde{O}(\alpha, \beta) = \tilde{A}(\alpha, \beta)$ et ce terme devient

$R_0 \exp(-ikx\theta) |\tilde{A}(\alpha, \beta)|^2$ qui après transformée de Fourier par la deuxième lentille donnera un tache focale intense autour de la direction θ (correspondant à un point \mathbf{r}_A dans le plan focal image de la deuxième lentille). Si l'objet n'est pas la lettre A , alors on obtiendra une tache très diffuse autour du point \mathbf{r}_A . Notons aussi que si l'objet est la lettre A mais décalée de la position qui a servi à l'enregistrement du filtre adapté, alors on observera quand même un point lumineux mais translaté dans le plan d'observation par rapport à \mathbf{r}_A . Un page contenant plusieurs lettre A donnera ainsi un ensemble de points lumineux distribués autour de \mathbf{r}_A .

Mathématiquement, l'intensité de la tache produite autour de \mathbf{r}_A dans le plan d'observation correspond à la fonction de corrélation spatiale de l'onde objet par l'onde créée par le filtre adapté. L'intensité est d'autant plus forte que la corrélation est bonne. C'est une autre manière de comprendre le principe de cette méthode de reconnaissance de forme.

9.5.4 Génération de l'onde conjuguée. Correction d'aberrations

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'éclairement de l'hologramme avec le conjugué $R^*(x, y)$ de l'onde de référence produit en transmission une onde d'amplitude proportionnelle à $O^*(x, y)$. Cette onde dite "conjuguée en phase" est l'analogue en régime monochromatique d'une onde retournée temporellement (comme celle que l'on peut générer directement en acoustique). On peut donc utiliser l'hologramme pour repropager en sens inverse une onde à travers un milieu aberrateur qui aurait perturbé une image, à condition que ce milieu aberrateur soit resté stable dans le temps. D'autres techniques de conjugaison de phase permettent de générer une onde réfléchie ou transmise $O^*(x, y)$ à partir d'une onde incidente $O(x, y)$, en utilisant des réponses non linéaires.

Références

- [1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd edition (McGraw Hill, New York, 1996). Existe en français : J.W. Goodman, *Introduction à l'Optique de Fourier* (Masson, Paris, 1972).
- [2] K. Iizuka, *Engineering Optics*, 3rd edition (Springer Verlag, Berlin, 2008).

Partie II

Lumière et Matière

Chapitre 10

Ondes électromagnétiques dans le vide

Objectifs

- Rappeler les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.
- Définir la polarisation des ondes monochromatiques.

10.1 Equations de Maxwell dans le vide

D'un point de vue microscopique, on peut considérer que la matière est constituée de charges ponctuelles (électrons et protons) placées dans le vide. La densité de charges microscopique s'écrit :

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (10.1)$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ est la position de la charge q_i à l'instant t et $\delta(\dots)$ est la distribution de Dirac. De même, la densité de courant s'écrit :

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (10.2)$$

où $\mathbf{v}_i(t)$ est la vitesse de la charge q_i . Les équations de Maxwell microscopiques relient les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} à ces termes sources :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho_m}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_m + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Dans un milieu matériel, il est inutile (et illusoire) de chercher à utiliser directement ces équations microscopiques pour décrire la propagation des ondes à l'échelle macroscopique. Une des raisons est qu'il est impossible de calculer en pratique les termes sources (densités de charge

et de courant) microscopiques. Nous verrons au chapitre 11 comment ce problème est résolu par l'introduction des équations de Maxwell macroscopiques et des relations constitutives qui décrivent la réponse du milieu matériel à l'échelle du milieu continu. Cette échelle est celle de la physique macroscopique et des sciences de l'ingénieur.

Dans le vide, les densités de charges et de courants sont nulles. Les équations de Maxwell sont donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.4)$$

On remarque que les champs électromagnétiques dans le vide sont transverses : $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ et $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

10.2 Ondes électromagnétiques dans le vide

10.2.1 Equation d'onde

A partir des équations de Maxwell dans le vide, on établit :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\operatorname{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (10.5)$$

On a également :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \quad (10.6)$$

car $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ dans le vide. On en déduit que le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ obéit à l'équation d'onde :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.7)$$

où $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. Le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vérifie également l'équation d'onde :

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.8)$$

10.2.2 Ondes planes

Choisissons un axe (Oz) arbitraire. Par définition, une onde plane se propageant dans la direction (Oz) est une solution de l'équation d'onde qui ne dépend que de z et de t à travers le groupement $z - ct$ (ou $z + ct$). L'onde $\mathbf{E}(z - ct)$ est progressive et se propage vers les z positifs, l'onde $\mathbf{E}(z + ct)$ se propage vers les z négatifs.

Un cas particulier important est celui des ondes *monochromatiques*, dont la dépendance temporelle est de la forme $\cos(\omega t)$. Pour l'onde plane progressive se propageant dans le sens des z positifs, la forme la plus générale de l'onde est alors :

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_x^0 \cos[k(z - ct) + \phi_x] \\ E_y(z, t) &= E_y^0 \cos[k(z - ct) + \phi_y] \\ E_z(z, t) &= 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

Notons que l'onde est transverse par rapport à la direction de propagation du fait de la condition $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. On a noté $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ le module du vecteur d'onde, avec λ longueur d'onde dans le vide.

Notation complexe

En notation complexe, on écrit $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ où $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est l'amplitude complexe de l'onde¹. On écrit alors pour l'amplitude complexe de l'onde plane :

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^0 \exp[i(kz + \phi_x)] \\ E_y &= E_y^0 \exp[ik(z + \phi_y)] \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on note $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ le vecteur d'onde, avec \mathbf{u}_z le vecteur unitaire dans la direction de propagation, on peut réécrire les équations de Maxwell dans le vide, pour des ondes planes monochromatiques, sous la forme :

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 & i\mathbf{k} \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 & i\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (10.10)$$

De cette écriture, on déduit directement les propriétés des ondes planes monochromatiques dans le vide :

- Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont transverses (normaux à \mathbf{k}) et perpendiculaires entre eux ;
- $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k})$ forment un trièdre direct ;
- Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} subissent le même déphasage.

10.2.3 Flux d'énergie. Vecteur de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique sous sa forme la plus générale a été établi pour la première fois par Poynting. Il permet en particulier d'identifier le vecteur de Poynting comme la grandeur caractérisant le flux d'énergie électromagnétique traversant une surface. Nous présentons le théorème de Poynting dans le cas de la propagation dans le vide. Le cas plus général du bilan d'énergie dans un milieu matériel sera présenté au chapitre 11.

En prenant le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ par le champ électrique, on obtient :

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (10.11)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$, et l'équation de Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, l'égalité se transforme en :

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (10.12)$$

¹Dans ce cours, nous choisissons conventionnellement une dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ pour les champs monochromatiques en notation complexe (la convention de signe opposé existe aussi dans certains ouvrages).

En identifiant, comme on le fait en régime statique, la quantité $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2$ à la densité d'énergie électrique véhiculée par le champ, et $\mathbf{B}^2/(2\mu_0)$ à la densité d'énergie magnétique, on définit la densité d'énergie du champ dans le vide $u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)/2 + \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)/(2\mu_0)$. En notant $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ le vecteur de Poynting instantané, l'équation (10.12) prend la forme d'une équation de continuité :

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (10.13)$$

Cette équation locale peut s'intégrer sur un volume fermé V quelconque de surface S . On obtient, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski pour transformer l'intégrale de volume de $\operatorname{div} \mathbf{\Pi}$ en intégrale de surface :

$$\int_S \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} \, dS + \frac{dU}{dt} = 0 \quad (10.14)$$

où $U = \int_V u \, dV$ est l'énergie contenue dans le volume V à l'instant t . Le flux du vecteur de Poynting permet donc de calculer le flux d'énergie électromagnétique à travers une surface.

10.3 Polarisation des ondes monochromatiques

Revenons à l'expression (10.9) de l'onde plane progressive monochromatique. Pour une lumière naturelle émise spontanément par une source incohérente, les déphasages ϕ_x et ϕ_y fluctuent rapidement dans le temps (typiquement avec un temps caractéristique $\sim 10^{-9}$ s). A des temps d'observation plus grands que ce temps caractéristique, il n'y a pas de relation stable entre ϕ_x et ϕ_y (au sens statistique il n'y a pas de corrélation) : la lumière est dite non polarisée. On peut la considérer comme la superposition de deux vibrations orthogonales indépendantes (incohérentes). On peut cependant dans certains cas fixer la *différence* de phase $\phi = \phi_x - \phi_y$ et créer une lumière polarisée.

On distingue différents cas de polarisation de la lumière :

- Polarisation rectiligne : $\phi = 2p\pi$ avec p entier. Dans ce cas \mathbf{E} reste parallèle à une direction fixe au cours de la propagation.
- Polarisation circulaire : $\phi = \pm\pi/2 + 2p\pi$ et $E_x^0 = E_y^0$. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit un cercle dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. On parle de vibration circulaire gauche pour $\phi = +\pi/2$, de vibration circulaire droite pour $\phi = -\pi/2$. Un observateur recevant la lumière qualifiera de gauche une vibration tournant dans le sens trigonométrique.
- Polarisation elliptique : $\phi = cte$. L'extrémité du vecteur \mathbf{E} décrit une ellipse dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. C'est la forme la plus générale d'un champ polarisé.

Remarque : Il est parfois utile d'écrire une onde monochromatique polarisée elliptiquement comme la superposition d'une onde polarisée circulaire gauche et d'une onde polarisée circulaire

droite. Cela est toujours possible. Une onde circulaire droite se propageant dans la direction (Oz) peut s'écrire, en notant \mathbf{u}_x et \mathbf{u}_y les vecteurs unitaires des axes (Ox) et (Oy) :

$$\mathbf{E}_d = E [\cos(\omega t)\mathbf{u}_x - \sin(\omega t)\mathbf{u}_y] = E \operatorname{Re}[(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y) \exp(-i\omega t)] \quad (10.15)$$

où E est une amplitude réelle. De même, une onde circulaire gauche s'écrit :

$$\mathbf{E}_d = E [\cos(\omega t)\mathbf{u}_x + \sin(\omega t)\mathbf{u}_y] = E \operatorname{Re}[(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) \exp(-i\omega t)] \quad (10.16)$$

On peut donc introduire les vecteurs unitaires définissant les polarisations droite et gauche :

$$\mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_g = \frac{\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y}{\sqrt{2}} \quad (10.17)$$

On peut alors réécrire tout champ \mathbf{E} d'une onde polarisée elliptiquement indifféremment sous la forme $\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y$ ou sous la forme $\mathbf{E} = E_d \mathbf{e}_d + E_g \mathbf{e}_g$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y \\ &= \frac{E_x + iE_y}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_d + \frac{E_x - iE_y}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_g \\ &= E_d \mathbf{e}_d + E_g \mathbf{e}_g \end{aligned}$$

Cette décomposition est utile lorsqu'on étudie l'interaction d'une lumière polarisée avec un milieu dont la réponse peut varier entre un état circulaire droit et un état circulaire gauche (c'est le cas pour certains milieux anisotropes).

Références

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition, chapitre 1.
- [2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chapitres 6 et 7.

Chapitre 11

Optique des milieux continus linéaires et isotropes

Objectifs

- Introduire les équations de Maxwell macroscopiques et les relations constitutives.
- Poser les bases de la propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes.
- Discuter les notions de dispersion, d'atténuation et d'absorption.

11.1 Equations de Maxwell : du microscopique au macroscopique

11.1.1 Champs microscopiques

Comme nous l'avons vu au chapitre 10, les équations de Maxwell microscopiques relient les champs électrique et magnétique aux termes sources microscopiques (on note $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t)$ les champs microscopiques dans ce chapitre afin de les distinguer des champs macroscopiques que nous allons introduire dans la suite) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}_m &= \frac{\rho_m}{\epsilon_0} & \operatorname{rot} \mathbf{E}_m &= -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_m &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B}_m &= \mu_0 \mathbf{j}_m + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_m}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.1)$$

La densité de charges microscopique (associée à des charges ponctuelles) s'écrit :

$$\rho_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (11.2)$$

où $\mathbf{r}_i(t)$ est la position de la charge q_i à l'instant t . De même, la densité de courant microscopique s'écrit :

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (11.3)$$

où $\mathbf{v}_i(t)$ est la vitesse de la charge q_i .

Dans la matière condensée, les champs décrits par ces équations présentent des variations d'amplitude très importantes sur des échelles spatiales de l'ordre de $10^{-9} - 10^{-10}$ m. D'un point de vue mathématique, ils comportent des singularités au voisinage des charges ponctuelles. Manipuler de tels champs s'avère impossible, et surtout inutile en pratique lorsqu'on s'intéresse à des variations spatiales des champs à des échelles grandes devant les échelles microscopiques caractérisant la structure atomique du milieu. Afin de n'avoir à manipuler que des champs présentant des variations spatiales grandes devant les échelles atomiques, on effectue une moyenne spatiale permettant d'obtenir les équations de Maxwell dites *macroscopiques*. Ces équations décrivent les champs à l'échelle du milieu continu. L'opération de moyenne revient également à régulariser les champs mathématiquement (suppression des singularités dues aux charges ponctuelles).

11.1.2 Définition d'une moyenne spatiale

Historiquement, ce sont les équations macroscopiques qui ont été introduites par J.C. Maxwell. C'est H.A. Lorentz qui, avec la théorie de l'électron, a donné une vision microscopique de l'interaction entre rayonnement électromagnétique et matière. Il a introduit la notion de moyenne spatiale pour faire le lien entre les équations macroscopiques de Maxwell et l'approche microscopique. C'est cette idée que nous développons ici, en suivant la démarche présentée dans la réf. [1], reprise dans l'ouvrage de J.D. Jackson [2]. Ce passage du microscopique au macroscopique permet de comprendre pourquoi et comment sont introduites les relations constitutives et les constantes optiques qui permettent de décrire les termes sources effectifs macroscopiques (comme la densité de polarisation \mathbf{P}). De plus, il permet de garder en tête certaines limites de l'approche macroscopique, qui peut parfois être mise en défaut, même en sciences de l'ingénieur (par exemple avec le développement des nanotechnologies).

Pour simplifier, nous raisonnons à une dimension d'espace. La moyenne spatiale d'une grandeur $F(x, t)$ est définie par

$$\langle F(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x - x') F(x', t) dx' \quad (11.4)$$

où la fonction w possède les propriétés suivantes :

- w est réelle et positive
- w a un support de taille caractéristique L (elle est non négligeable uniquement dans une région de l'espace de taille L). La longueur L définit la dimension d'un élément de volume grand à l'échelle atomique, et petit à l'échelle macroscopique (qui définit un point à l'échelle du milieu continu). Dans le cas de l'optique, on aura 10^{-10} m $\ll L \ll \lambda$
- w est normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1$
- w est régulière (dérivable).

Un exemple de fonction satisfaisant à ces critères est $w(x) = (\sqrt{\pi}L)^{-1} \exp(-x^2/L^2)$.

Afin de moyenner spatialement les équations de Maxwell microscopiques (et d'obtenir ainsi les équations macroscopiques), il est nécessaire de moyenner des dérivées. Nous allons voir que les moyennes des dérivées sont simplement les dérivées des moyennes.

Dérivée temporelle :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle F(x, t) \rangle \quad (11.5)$$

Dérivée spatiale :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle F(x, t) \rangle \quad (11.6)$$

Le résultat est immédiat dans le cas de la moyenne temporelle. Dans le cas de la moyenne spatiale, il se démontre grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle F(x, t) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \int w(x - x') F(x', t) dx' \\ &= \int \frac{\partial w}{\partial x} (x - x') F(x', t) dx' \\ &= - \int \frac{\partial w}{\partial x'} (x - x') F(x', t) dx' \\ &= -[w F] + \int w(x - x') \frac{\partial F}{\partial x'}(x', t) dx' \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right\rangle \end{aligned}$$

11.1.3 Passage aux équations de Maxwell moyennées

Equations sans termes sources

Pour ces équations, le passage aux champs moyennés ne pose pas de problème. On obtient directement :

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{B}_m \rangle = 0 \quad \operatorname{rot} \langle \mathbf{E}_m \rangle = - \frac{\partial \langle \mathbf{B}_m \rangle}{\partial t}$$

Dans la suite, on note \mathbf{E} et \mathbf{B} les champs moyennés, dits aussi champs macroscopiques.

Equations avec termes sources

La prise de moyenne des termes sources microscopiques $\rho_m(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$ est plus délicate. Celle-ci fait apparaître de nouveaux termes sources macroscopiques. La démonstration dans le cas de la densité de charges est donnée dans l'annexe A.

Pour la densité de charges macroscopique $\rho = \langle \rho_m \rangle$, on obtient :

$$\rho = \rho_{\text{libre}} - \operatorname{div} \mathbf{P} \quad (11.7)$$

où ρ_{libre} est la densité de charges "libres", et $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ est la densité de polarisation (homogène à un moment dipolaire par unité de volume). Elle correspond à la moyenne spatiale des moments

dipolaires atomiques :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\text{atomes}} \mathbf{p}_{\text{at}} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) \quad (11.8)$$

où $w(\mathbf{r})$ est la fonction utilisée pour effectuer la moyenne spatiale en trois dimensions. On a noté \mathbf{p}_{at} le moment dipolaire et \mathbf{r}_{at} la position de chaque atome. En d'autres termes, lorsque le matériau est soumis à un champ électromagnétique, il se polarise et acquiert une densité volumique de polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, telle que le moment dipolaire $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ d'un élément de volume δV soit $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \delta V$. Cette polarisation du matériau contribue à la densité de charge macroscopique via le terme $-\text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. En pratique, on n'utilise pas l'expression (11.8) pour calculer $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, mais nous verrons comment modéliser la réponse des matériaux à l'aide de la permittivité diélectrique (ou constante diélectrique).

Le nouveau terme $-\text{div} \mathbf{P}$ décrit donc les charges de polarisation, dues à la déformation du nuage électronique des atomes sous l'action du champ. On parle alors de densité de charges liées. La terme ρ_{libre} est par opposition appelé densité de charges libres, bien qu'une dénomination plus appropriée serait densité de charges "nettes" car des charges éventuellement liées peuvent contribuer à ρ_{libre} (par exemple des impuretés ioniques dans un cristal). Il est important de noter que $\rho_{\text{libre}} = 0$ lorsque le matériau est macroscopiquement neutre (ce qui est le cas de la plupart des matériaux utilisés en optique). Par exemple dans un métal non chargé, la contribution des électrons libres est exactement compensée par celle des atomes ionisés du réseau cristallin, et $\rho_{\text{libre}} = 0$.

Pour la densité de courant macroscopique $\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_m \rangle$, on obtient :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M} \quad (11.9)$$

Le premier terme $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ est la densité de courants due aux charges libres (cette fois ce sont vraiment les charges libres uniquement), comme les électrons de conduction d'un métal. Le deuxième terme est le courant de polarisation $\partial \mathbf{P} / \partial t$, qui décrit le courant créé par la déformation du nuage électronique des atomes en régime dynamique. Le troisième terme fait apparaître la densité d'aimantation $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ (homogène à un moment magnétique par unité de volume), définie comme :

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\text{atomes}} \mathbf{m}_{\text{at}} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{at}}) \quad (11.10)$$

avec \mathbf{m}_{at} le moment magnétique atomique. A l'échelle d'un élément de volume δV , l'aimantation est $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \delta V$. Cette aimantation est nulle dans les matériaux non magnétiques. Comme pour la densité de polarisation, en pratique, on n'utilise pas l'expression (11.10) pour calculer $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, mais on modélise la réponse des matériaux à l'aide de la perméabilité magnétique.

En conclusion, dans un milieu matériel, les équations de Maxwell macroscopiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho_{\text{libre}} - \text{div} \mathbf{P}}{\epsilon_0} & \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 & \text{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.11)$$

11.1.4 Autre écriture des équations de Maxwell macroscopiques

Il est possible de donner au jeu d'équations macroscopiques une forme similaire à celui des équations microscopiques. Pour cela, on introduit deux nouveaux champs notés \mathbf{D} et \mathbf{H} , définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\end{aligned}\quad (11.12)$$

Dans la terminologie habituelle de l'électromagnétisme, le champ \mathbf{D} est appelé champ de déplacement électrique, et le champ \mathbf{H} est nommé champ magnétique (le champ \mathbf{B} étant alors appelé induction magnétique). Avec ces nouveaux champs, les équations de Maxwell macroscopiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_{\text{libre}} & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (11.13)$$

C'est ce jeu même d'équations qui a été initialement introduit par Maxwell. Il faut bien noter que la simplification d'écriture par rapport à (11.11) n'a en rien réduit la complexité du problème. La disparition des termes sources de polarisation \mathbf{P} et d'aimantation \mathbf{M} s'est faite en introduisant deux nouveaux champs \mathbf{D} et \mathbf{H} . Dans tous les cas, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations (le système d'équations n'est plus fermé, comme il l'était dans l'approche microscopique). C'est en général le prix à payer lorsque l'on passe à une description macroscopique. Il est alors nécessaire d'introduire des relations entre ces inconnues (relations constitutives), moyennant l'introduction de paramètres décrivant la réponse macroscopique du milieu (constantes optiques).

11.2 Relations constitutives. Constantes optiques

Nous nous limitons dans ce chapitre à la description des milieux linéaires (relations linéaires entre les termes sources macroscopiques et les champs) et isotropes (constantes optiques scalaires). Les milieux anisotropes ou à réponse non linéaire seront introduits dans des chapitres spécifiques.

11.2.1 Rappel : relations constitutives en régime statique

En régime statique, on distingue le comportement électrique des conducteurs (métaux) de celui des isolants (diélectriques). On décrit les conducteurs à l'aide de la conductivité σ , et la relation constitutive est la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j}_{\text{libre}} = \sigma \mathbf{E}\quad (11.14)$$

La conductivité statique d'un métal peut être obtenue par exemple en mesurant la résistance d'un fil de longueur et de section données.

On décrit les isolants à l'aide de la permittivité relative (dite aussi constante diélectrique) ϵ_r , et la relation constitutive reliant le déplacement électrique ou la densité de polarisation au champ

électrique qui règne à l'intérieur du matériau :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{P} &= \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}\end{aligned}\quad (11.15)$$

La constante diélectrique statique d'un isolant peut se déduire de la mesure de capacité d'un condensateur plan dont l'espace entre les deux électrodes est rempli du matériau étudié.

Les milieux magnétiques sont décrits par la perméabilité magnétique relative μ_r , qui relie le champ magnétique \mathbf{H} à l'induction magnétique \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (11.16)$$

11.2.2 Régime dynamique. Dispersion

En régime dynamique, les relations constitutives gardent une forme similaire. Cependant, l'inertie des charges mises en mouvement par le champ électromagnétique fait que la réponse s'établit avec un retard par rapport à l'excitation. Les milieux deviennent *dispersifs*. Lorsque l'on décrit la réponse optique du matériau dans le domaine fréquentiel, la dispersion se traduit par le fait que les constantes optiques (conductivité, constante diélectrique, perméabilité magnétique relative) dépendent de la fréquence. On a par exemple pour un milieu diélectrique :

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (11.17)$$

les champs $\mathbf{D}(\omega)$ et $\mathbf{E}(\omega)$ étant alors des champs monochromatiques.

Notons que pour des champs ayant des dépendances temporelles plus compliquées, on peut toujours les décomposer en fréquences à l'aide d'une transformée de Fourier¹:

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{D}(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (11.18)$$

La relation (11.17) est donc à comprendre comme une relation entre les transformées de Fourier des champs. Si l'on souhaite écrire la relation constitutive d'un milieu dispersif en domaine temporel, il faut alors utiliser un produit de convolution :

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_r(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (11.19)$$

où $\epsilon_r(t)$ et $\epsilon_r(\omega)$ sont reliées par une relation de transformée de Fourier du type (11.18). Bien que cela soit possible formellement, la complexité technique fait qu'on préfère décrire la propagation dans un milieu dispersif en domaine fréquentiel.

En résumé, dans les milieux dispersifs, on décrit la propagation optique dans le domaine fréquentiel, en travaillant avec des champs monochromatiques. La dispersion se traduit alors par des constantes optiques qui dépendent de la fréquence. Les relations les plus courantes s'écrivent (pour

¹Nous n'utilisons pas de notations différentes pour la fonction et sa transformée de Fourier, et nous les distinguons sans ambiguïté par la variable dont elles dépendent.

des milieux linéaires, isotropes, et éventuellement hétérogènes) :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \text{ou } \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 [\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r}, \omega) &= \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \mu_0 \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \tag{11.20}$$

Les deux premières relations, qui sont équivalentes, correspondent à la réponse diélectrique (polarisation du milieu), la troisième correspond à la réponse due aux charges libres (présentes dans les métaux ou semiconducteurs) et la dernière aux milieux magnétiques.

11.2.3 Constante diélectrique généralisée

La conductivité et la constante diélectrique traduisent toutes deux la réponse du matériau au champ électrique. En régime dynamique et aux fréquences optiques ($10^{14} - 10^{15}$ Hz), il n'est pas possible pour un matériau donné de séparer les deux types de réponses, dues aux charges libres et aux charges liées. Contrairement au cas statique, aucune expérience ne permet de mesurer séparément la conductivité $\sigma(\omega)$ et la constante diélectrique $\epsilon_r(\omega)$ en régime optique. La séparation des deux termes sources $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ et $\partial\mathbf{P}/\partial t$ dans les équations de Maxwell macroscopiques est donc artificielle, car on ne mesure que la contribution des deux termes à la fois².

En conséquence, on utilise une seule constante optique qui regroupe les effets de conduction due aux charges libres et de polarisation, appelée constante diélectrique *généralisée*, que nous noterons provisoirement $\tilde{\epsilon}_r(\omega)$. Elle permet d'écrire formellement la somme de deux termes sources $\mathbf{j}_{\text{libre}} + \partial\mathbf{P}/\partial t$ comme un seul terme effectif de polarisation. En régime monochromatique, on a donc :

$$\mathbf{j}_{\text{libre}} - i\omega \mathbf{P} = -i\omega \mathbf{P}_{\text{eff}} \tag{11.21}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sigma \mathbf{E} - i\omega \epsilon_0 [\epsilon_r - 1] \mathbf{E} = -i\omega \epsilon_0 [\tilde{\epsilon}_r - 1] \mathbf{E} \tag{11.22}$$

La constante diélectrique généralisée a donc pour expression :

$$\tilde{\epsilon}_r(\omega) = \epsilon_r(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \tag{11.23}$$

Remarque : Dans la suite, nous noterons simplement $\epsilon_r(\omega)$ la constante diélectrique généralisée (que nous appellerons simplement constante diélectrique), et nous ne ferons plus référence à la conductivité. Il faut bien garder à l'esprit que cette constante diélectrique intègre à la fois les effets de polarisation et ceux des charges libres. C'est cette grandeur qui est mesurée en régime optique ou infrarouge. C'est donc elle qui est donnée dans les tables de constantes optiques (ou sa racine carrée qui est, comme nous le verrons, l'indice optique complexe).

²Aux basses fréquences < 100 GHz pour lesquelles les matériaux n'ont en général pas de fréquences de résonance, les constantes constitutives sont peu différentes du régime statique. On peut alors continuer à traiter séparément les deux termes sources.

11.2.4 Relations de Kramers-Kronig

On utilise parfois, plutôt que la constante diélectrique, la grandeur $\chi(\omega) = [\epsilon_r(\omega) - 1]$, appelée susceptibilité électrique du matériau. La susceptibilité relie la densité de polarisation \mathbf{P} au champ \mathbf{E} , qui sont deux grandeurs conjuguées, dont le produit donne la contribution à l'énergie totale du système (d'une façon générale en physique, c'est ainsi que l'on définit une susceptibilité). Comme toute susceptibilité, $\chi(\omega)$ obéit à des relations générales qui sont une conséquence du principe de causalité. Ces relations sont appelées relations de Kramers-Kronig, et relient la partie réelle de χ (notée χ') à sa partie imaginaire (notée χ''), et *vice versa* :

$$\begin{aligned}\chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi''(\omega) &= \frac{-1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'\end{aligned}\tag{11.24}$$

où VP désigne la valeur principale de l'intégrale. En termes de constante diélectrique, ces relations s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_r'(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_r''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \epsilon_r''(\omega) &= \frac{-1}{\pi} VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_r'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'\end{aligned}\tag{11.25}$$

Ces expressions tout à fait générales ont des conséquences importantes en pratique. En particulier, étant donné que la partie imaginaire $\epsilon_r''(\omega)$ décrit l'absorption dans le matériau (nous le verrons dans la suite du chapitre), elles impliquent que :

- Tout milieu absorbant ($\epsilon_r'' \neq 0$) est nécessairement dispersif (et *vice versa*). Le seul milieu rigoureusement non dispersif est donc le vide !
- Au voisinage d'une raie d'absorption ($\epsilon_r''(\omega)$ passe par un maximum aigu en ω_0), la partie réelle $\epsilon_r'(\omega)$ passe successivement par un maximum puis par un minimum, comme représenté sur la figure 11.1.
- En principe, on peut déterminer la partie réelle de $\epsilon_r'(\omega)$ à partir de la mesure du spectre d'absorption qui donne accès à $\epsilon_r''(\omega)$.

Notons pour finir que bien que l'indice optique (défini comme nous allons le voir par $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ dans un milieu non magnétique) ne soit pas une susceptibilité, il vérifie également les relations de Kramers-Kronig. On a donc des relations analogues entre les parties réelle et imaginaire de l'indice complexe.

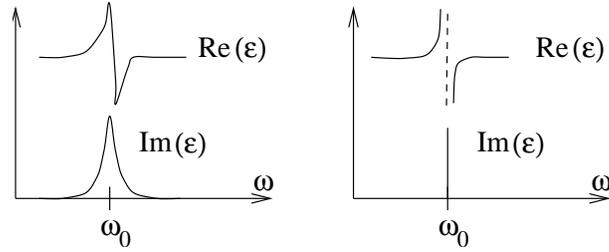


Figure 11.1: Allure générale des parties réelles et imaginaires de la constante diélectrique au voisinage d'un raie d'absorption. Gauche : cas réel. Droite : cas idéal où la raie d'absorption est schématisée par une distribution de Dirac.

11.3 Propagation optique dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes

11.3.1 Equation de Helmholtz

Dans les milieux dispersifs, on travaille en général en régime monochromatique. L'équation régissant l'évolution du champ électrique est l'équation de Helmholtz que nous allons établir.

Les équations de Maxwell et une identité vectorielle permettent d'écrire :

$$\mathbf{rot\ rot\ E} = i\omega \mathbf{rot\ B} = \mathbf{grad}(\mathbf{div\ E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (11.26)$$

Dans un milieu *neutre* ($\rho_{\text{libre}} = 0$) et *homogène* (ϵ_r indépendante de la position \mathbf{r}), on a $\mathbf{div\ D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{div\ E} = 0$ et donc $\mathbf{div\ E} = 0$. On a donc :

$$i\omega \mathbf{rot\ B} = -\Delta \mathbf{E} \quad (11.27)$$

De plus, on peut relier $\mathbf{rot\ B}$ à \mathbf{E} par

$$i\omega \mathbf{rot\ B} = i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) \mathbf{rot\ H} = i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) [-i\omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}] \quad (11.28)$$

Dans la dernière égalité, nous avons utilisé la constante diélectrique généralisée qui inclut implicitement la contribution du terme $\mathbf{j}_{\text{libre}}$. De plus, nous avons explicitement utilisé l'homogénéité du milieu (μ_r et ϵ_r sont indépendantes de la position, ce qui permet de les considérer comme constantes dans les dérivées spatiales). Finalement, on obtient l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (11.29)$$

Nous avons introduit la vitesse de la lumière dans le vide c , définie par $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

11.3.2 Indice complexe. Propagation et atténuation

On définit l'indice de réfraction complexe $n(\omega)$ par la relation :

$$n(\omega) = [\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)]^{1/2} \quad (11.30)$$

La racine carrée dans cette définition est celle d'un nombre complexe. La détermination à prendre est celle qui donne une partie imaginaire de l'indice complexe positive. Pour un milieu passif (non amplificateur), et avec le choix de dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ qui est fait dans ce cours, c'est cette détermination qui correspond à une atténuation de l'onde au cours de sa propagation³. Notons également que dans les milieux non magnétiques (cas rencontré fréquemment, pour lequel $\mu_r = 1$), on a plus simplement $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$.

Les parties réelle et imaginaire de l'indice ont des significations précises. Prenons l'exemple d'une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu d'indice $n = n' + in''$, dans la direction de l'axe Oz . Son amplitude complexe est de la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_0 \exp(in' \frac{\omega}{c} - i\omega t) \exp(-n'' \frac{\omega}{c} z) \quad (11.31)$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide. La première exponentielle est le terme de propagation, dans lequel la partie réelle de l'indice décrit la modification de la *vitesse de phase* :

$$v_\phi = \frac{c}{n'} \quad (11.32)$$

La seconde exponentielle est un terme d'atténuation, ou d'*extinction* (la partie imaginaire de l'indice complexe est aussi appelée indice d'extinction). L'onde se propage en s'atténuant, avec une longueur caractéristique :

$$\delta = \frac{c}{\omega n''} = \frac{\lambda}{2\pi n''} \quad (11.33)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. Dans un milieu homogène, l'atténuation est souvent due à l'absorption par le milieu. En effet, dans un milieu non magnétique, on a $n^2 = \epsilon_r$, et donc $2n'n'' = \epsilon_r''$. Comme nous le verrons ci-dessous, la partie imaginaire de la constante diélectrique ϵ_r'' décrit l'absorption par le milieu (transformation de l'énergie électromagnétique en chaleur). Cependant, il existe des situations dans lesquelles l'atténuation est due à d'autres causes. Par exemple, dans un métal sans pertes (qui est un cas idéalisé aux fréquences optiques, mais courant aux fréquences $< \text{GHz}$), la constante diélectrique est réelle négative, de sorte que $n = in''$ est imaginaire pur. Dans ce cas, une onde pénétrant dans le métal est atténuée sans être absorbée. L'énergie est réfléchiée. La longueur d'extinction δ est alors l'épaisseur de peau du métal. Une autre situation d'atténuation sans absorption est celle des milieux hétérogènes diffusants, dans lesquels une onde collimatée s'atténue par diffusion de la lumière dans d'autres directions. Pour cette onde collimatée, on peut introduire un indice effectif complexe dont la partie imaginaire traduit l'atténuation par diffusion.

11.4 Bilan d'énergie. Puissance absorbée

11.4.1 Puissance absorbée

Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un milieu matériel, un échange d'énergie irréversible peut se produire entre le rayonnement et la matière. Cette énergie est convertie en

³Dans certains ouvrages, un choix de dépendance temporelle en $\exp(+i\omega t)$ est fait pour les champs monochromatiques. Dans ce cas, la partie imaginaire de l'indice complexe est négative dans les milieux passifs.

chaleur, c'est le phénomène d'absorption. De manière instantanée, la puissance fournie par le champ à la matière, par unité de volume, est $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, où \mathbf{j} est le courant macroscopique total (incluant le courant des charges libres $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ et le courant de polarisation $\partial\mathbf{P}/\partial t$)⁴. Ce terme peut donc être compris comme un terme d'effet Joule généralisé.

Pour des champs oscillants aux fréquences optiques, seule la valeur moyenne temporelle de l'énergie absorbée (sur un temps grand devant la période d'oscillation du champ) a un sens. La puissance volumique absorbée localement dans le milieu est donc :

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (11.34)$$

Dans cette expression, les crochets représentent la valeur moyenne temporelle. Pour des champs monochromatiques, de la forme $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)]$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)]$, la puissance volumique absorbée en moyenne temporelle s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^*] \quad (11.35)$$

où * désigne le complexe conjugué. Dans un milieu non magnétique, et en utilisant la constante diélectrique généralisée, on a :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\epsilon_0 [\epsilon_r(\omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (11.36)$$

et la puissance volumique absorbée localement au point \mathbf{r} (unité $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$) s'écrit finalement :

$$\mathcal{P}_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \epsilon_r''(\omega) |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \quad (11.37)$$

L'absorption dans le milieu est donc décrite par la partie imaginaire $\epsilon_r''(\mathbf{r}, \omega)$ de la constante diélectrique. Le fait d'avoir utilisé la constante diélectrique généralisée fait que ce terme contient les pertes dues aux charges libres (effet Joule habituel dans les métaux) et celles dues à la polarisation volumique (pertes diélectriques, dues par exemple aux collisions phonons-phonons et phonons-impuretés dans les cristaux, ou aux collisions entre molécules dans les gaz neutres). Dans un milieu magnétique, les pertes par absorption dues à l'aimantation seraient décrites par la partie imaginaire de la perméabilité relative $\mu_r(\omega)$.

11.4.2 Théorème de Poynting

Le bilan d'énergie électromagnétique sous sa forme la plus générale est connu sous le nom de théorème de Poynting. Nous avons établi ce théorème dans le cas de la propagation dans le vide au chapitre 10. Nous allons maintenant le généraliser au cas de champs dans un milieu matériel continu. En prenant le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\text{rot } \mathbf{H}$ par le champ électrique, on obtient :

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (11.38)$$

En utilisant l'identité vectorielle $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$, et l'équation de Maxwell $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, l'égalité se transforme en :

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{j}_{\text{libre}} \cdot \mathbf{E} \quad (11.39)$$

⁴Nous nous restreignons pour simplifier aux milieux non magnétiques. Pour un milieu magnétique, la démarche se généralise en ajoutant la contribution du courant magnétique $\text{rot } \mathbf{M}$.

En notant $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ le vecteur de Poynting instantané, l'équation s'écrit sous une forme très générale :

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j}_{\text{libre}} \cdot \mathbf{E} \quad (11.40)$$

Le membre de droite décrit les pertes par effet Joule dues au courant de charges libres. Les deuxième et troisième termes du membre de gauche ne peuvent pas s'interpréter directement comme une densité d'énergie, comme dans le cas du vide. Ils contiennent différentes contributions : densité d'énergie du champ, énergie potentielle stockée dans la matière, et pertes diélectriques (polarisation) et magnétiques. La discussion (subtile) de ces différentes contributions en régime temporel sort du cadre de ce cours. Nous allons par contre expliciter le bilan d'énergie en moyenne temporelle dans le cas du régime monochromatique.

11.4.3 Bilan d'énergie en régime monochromatique

En régime monochromatique, nous allons considérer les valeurs moyennes temporelles des grandeurs énergétiques. On procède comme précédemment, en utilisant la constante diélectrique généralisée afin de regrouper les pertes diélectriques et métalliques dans le même terme. Le produit scalaire de l'équation de Maxwell donnant $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ par le complexe conjugué du champ électrique \mathbf{E}^* donne :

$$\mathbf{E}^* \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* \quad (11.41)$$

Cette expression se transforme en :

$$i\omega \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^* = \operatorname{div}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) + i\omega \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}^* \quad (11.42)$$

L'équation en valeur moyenne temporelle s'obtient en prenant $1/2 \operatorname{Re}[\dots]$ de chaque terme. En utilisant $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (milieu non magnétique), on obtient :

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{\Pi} \rangle = -\mathcal{P}_{\text{abs}} \quad (11.43)$$

où \mathcal{P}_{abs} est la puissance volumique absorbée donnée par l'Eq. (11.37) et $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = 1/2 \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$ est la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

L'intégration de cette équation locale sur un volume fermé V quelconque donne :

$$\int_S \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathbf{n}_{\text{ext}} dS = -P_{\text{abs}} \quad (11.44)$$

où $P_{\text{abs}} = \int_V \mathcal{P}_{\text{abs}} dV$ est la puissance absorbée dans le volume V . Dans un milieu matériel, le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée entourant un volume V donne donc la puissance absorbée dans le volume V . Cette puissance absorbée correspond à un transfert irréversible de l'énergie du champ en chaleur.

Références

- [1] G. Russakoff, "A derivation of the macroscopic Maxwell equations", Am. J. Phys. **38**, 1188 (1970).

[2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001).

[3] J.-J. Greffet, *Electromagnétisme*, cours de l'Ecole Centrale Paris (1998) ; *Physique II*, cours de l'Ecole Centrale Paris (2008).

Chapitre 12

Ondes aux interfaces : réflexion et transmission

Objectifs

- Etablir les lois de la réflexion et de la transmission à une interface plane.
- Calculer les facteurs de Fresnel en amplitude et en énergie.
- Discuter physiquement quelques comportements généraux.

12.1 Lois de Snell-Descartes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'interaction d'une onde plane incidente avec une interface plane séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2 (voir figure 12.1). On suppose les deux milieux homogènes, isotropes et non magnétiques ($\mu_r = 1$). Cette onde donne lieu à une onde plane réfléchie, et une onde plane transmise. On cherche dans cette partie à déterminer les directions de propagation des ondes réfléchie et transmise, comme dans le problème initialement étudié par Snell et Descartes en termes de propagation de rayons lumineux. On se limite donc dans un premier temps à des milieux non absorbants (n_1 et n_2 réels).

12.1.1 Principe général

L'idée générale qui conduit aux lois de Snell-Descartes est la continuité de la phase à l'interface $z = 0$ entre l'onde incidente et les ondes réfléchie et transmise. Si on note $\exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})$ la phase de l'onde incidente en un point \mathbf{r} quelconque, $\exp(i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})$ celle de l'onde réfléchie et $\exp(i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})$ celle de l'onde transmise, cette condition s'écrit :

$$\mathbf{k}_i^{\parallel} = \mathbf{k}_r^{\parallel} = \mathbf{k}_t^{\parallel} \quad (12.1)$$

où le symbole \parallel désigne la composante du vecteur d'onde parallèle à l'interface $z = 0$. Cette relation est l'expression la plus générale des lois de Snell-Descartes. On peut la comprendre

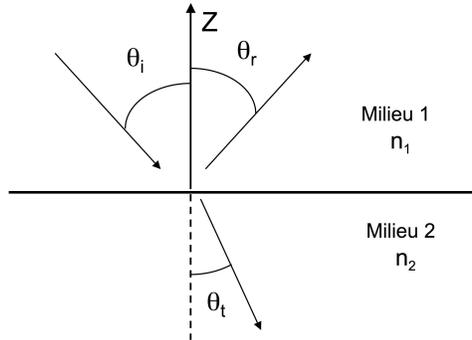


Figure 12.1: Géométrie considérée pour la détermination des lois de Snell-Descartes.

également comme une conséquence de l'invariance par translation de l'interface dans la direction du plan $x - y$ (en termes mécaniques on aurait conservation de l'impulsion du photon parallèlement à l'interface). On peut en déduire l'écriture habituelle des lois de la réflexion et de la transmission comme nous allons le voir.

12.1.2 Lois de la réflexion

La condition $\mathbf{k}_i^{\parallel} = \mathbf{k}_r^{\parallel}$ implique la conservation des composantes selon Ox et selon Oy du vecteur d'onde : $k_i^x = k_r^x$ et $k_i^y = k_r^y$. On en déduit que le vecteur d'onde (ou le rayon) réfléchi reste dans le plan d'incidence défini par le vecteur \mathbf{k}_i et l'axe Oz . C'est la première loi de Snell-Descartes pour la réflexion.

Cette condition implique également la conservation du module du vecteur d'onde parallèle à l'interface, ce qui s'écrit $n_1 \omega/c \sin \theta_i = n_1 \omega/c \sin \theta_r$, et qui implique donc :

$$\theta_r = \theta_i \quad (12.2)$$

Cette relation exprime la seconde loi de Snell-Descartes pour la réflexion.

12.1.3 Lois de la transmission

Dans le cas de la transmission, la première loi de Snell-Descartes stipule de la même manière que le vecteur d'onde (ou le rayon) transmis reste dans le plan d'incidence. La conservation du module du vecteur d'onde s'écrit $n_1 \omega/c \sin \theta_i = n_2 \omega/c \sin \theta_t$ ce qui donne :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (12.3)$$

qui est la seconde loi de Snell-Descartes pour la transmission. Elle montre que le vecteur d'onde transmis n'a pas la même direction que le vecteur d'onde incident : c'est le phénomène de réfraction.

12.2 Facteurs de Fresnel en amplitude

Caractériser la réflexion et la transmission à une interface revient non seulement à déterminer les directions de propagation, mais également la fraction de l'amplitude de l'onde incidente qui est réfléchi ou transmise. Ce sont les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel qui donnent cette information.

L'état de polarisation d'une onde électromagnétique plane se décompose sur une base à deux composantes (par exemple deux directions de polarisations rectilignes perpendiculaires, ou les deux polarisations circulaires droite et gauche). On définit les facteurs de Fresnel pour les deux polarisations rectilignes fondamentales transverse électrique (dite TE ou s) et transverse magnétique (dite TM ou p), représentées sur la figure 12.2.

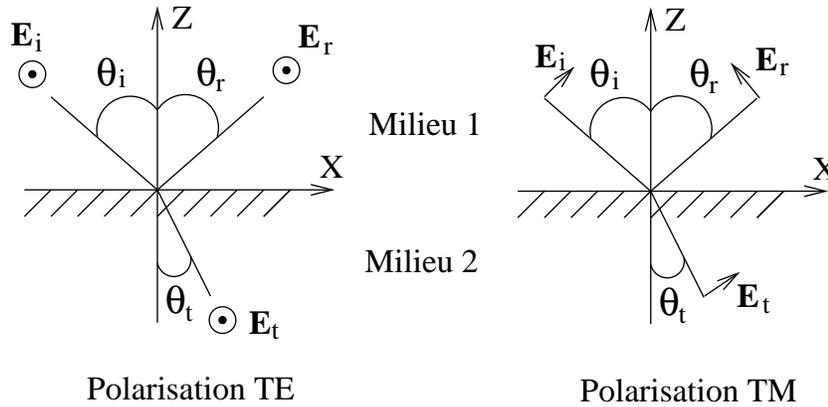


Figure 12.2: Géométrie du système considéré pour définir les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel.

Nous considérons dans ce chapitre des matériaux linéaires, homogènes et isotropes, mais qui peuvent éventuellement être absorbants. Leurs propriétés optiques sont décrites par les indices complexes n_1 (milieu $z > 0$) et n_2 (milieu $z < 0$). Afin de déterminer les facteurs de Fresnel, nous allons utiliser les relations de continuité des champs électrique et magnétique à l'interface $z = 0$.

12.2.1 Relations de continuité des champs

Les relations de continuité des champs à l'interface sont les suivantes :

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(1)}(z = 0) = \mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}(z = 0)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^{(1)}(z = 0) = \mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}(z = 0)$$

$$\mathbf{D}_{\perp}^{(1)}(z = 0) = \mathbf{D}_{\perp}^{(2)}(z = 0)$$

$$\mathbf{B}_{\perp}^{(1)}(z = 0) = \mathbf{B}_{\perp}^{(2)}(z = 0)$$

La notation \parallel (\perp) désigne la composante tangentielle (normale) du champ par rapport à l'interface. Les exposants 1 et 2 font référence au champ total calculé dans les milieux 1 et 2, respectivement (dans le milieu 1, le champ total est la somme du champ incident et du champ réfléchi). Dans le cas qui nous intéresse dans la suite, seules les deux premières relations seront utiles.

Remarque :

La composante tangentielle de \mathbf{H} et la composante normale de \mathbf{D} sont toujours continues à une interface, sauf dans le cas du modèle de métal parfaitement conducteur, qui est un cas fictif idéal. Dans ce cas, on a $\mathbf{H}^{(2)} = 0$, $\mathbf{D}^{(2)} = 0$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{(1)}(z=0) = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}$ et $\mathbf{D}_{\perp}^{(1)}(z=0) = \sigma_s \mathbf{n}$, où \mathbf{j}_s est la densité surfacique de courant, σ_s la densité surfacique de charge et \mathbf{n} la normale à la surface (ici le vecteur unitaire de l'axe Oz).

12.2.2 Calcul des facteurs de Fresnel en polarisation TE

On écrit les champs électriques incident, réfléchi et transmis sous la forme (voir figure 12.2) :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(\alpha x - \gamma_1 z)] \\ \mathbf{E}_r &= r_s E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(\alpha x + \gamma_1 z)] \\ \mathbf{E}_t &= t_s E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(\alpha x - \gamma_2 z)]\end{aligned}$$

Ces champs sont polarisés selon \mathbf{e}_y (vecteur unitaire de l'axe Oy), ce qui correspond bien à la polarisation TE. Dans ces expressions, on a omis la dépendance temporelle en $\exp(-i\omega t)$ et on a utilisé les lois de Snell-Descartes (la composante selon x du vecteur d'onde α est conservée). Dans le cas où le milieu incident est transparent (n_1 réel), ce qui est le cas le plus fréquent, la composante selon x du vecteur d'onde s'écrit simplement

$$\alpha = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_i \quad (12.4)$$

où θ_i est l'angle d'incidence. Cependant le formalisme reste applicable dans le cas plus compliqué où α serait complexe (onde incidente évanescence dans la direction Ox).

Chacune des ondes doit vérifier l'équation de Helmholtz, ce qui entraîne $\alpha^2 + \gamma_j^2 = n_j^2 \omega^2 / c^2$, pour $j = 1, 2$. Les composantes selon Oz des vecteurs d'onde dans les deux milieux sont donc données par :

$$\gamma_j = (n_j^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2)^{1/2} \quad (12.5)$$

Dans le cas le plus général, les deux composantes γ_j peuvent être complexes, et on choisit le signe de la racine carrée de sorte que $\text{Re}(\gamma_j) > 0$ et $\text{Im}(\gamma_j) > 0$.

Dans la plupart des situations, le milieu incident est transparent (n_1 réel), de telle sorte que la direction d'incidence θ_i fixe $\alpha = n_1 \omega / c \sin \theta_i$. On a alors simplement $\gamma_1 = n_1 \omega / c \cos \theta_i$ qui reste réel et décrit une onde incidente et une onde réfléchie propagatives. Par contre, le vecteur d'onde selon Oz de l'onde transmise γ_2 peut lui être complexe. Cette situation se rencontre dans le cas de la réflexion sur un milieu absorbant, et dans le cas de la réflexion totale interne que nous discuterons plus loin.

Les expressions des facteurs de réflexion et de transmission r_s et t_s s'obtiennent en utilisant les relations de continuité des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} à l'interface $z = 0$. La continuité de \mathbf{E}_{\parallel} entraîne :

$$1 + r_s = t_s \quad (12.6)$$

La continuité de \mathbf{H}_{\parallel} revient à écrire celle de H_x , et donc de $\partial E_y / \partial z$ (car $\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}$ et \mathbf{E} n'a qu'une composante selon Oy). On obtient :

$$\gamma_1 (1 - r_s) = \gamma_2 t_s \quad (12.7)$$

De ces deux équations, on déduit l'expression des facteurs de Fresnel en amplitude (grandeurs complexes) :

$$r_s = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad t_s = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (12.8)$$

Ces facteurs s'expriment donc directement en fonction des composantes selon Oz des vecteurs d'onde dans les deux milieux. Les expressions ci-dessus sont valables même lorsque l'un des vecteurs d'onde est complexe, et sont donc les plus générales.

Autre écriture dans le cas des milieux transparents

Dans le cas où les ondes sont propagatives (γ_1 et γ_2 sont réels), on peut également écrire ces expressions en fonction des angles d'incidence et de transmission en utilisant le fait que $\gamma_1 = n_1 \omega / c \cos \theta_i$ $\gamma_2 = n_2 \omega / c \cos \theta_t$:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (12.9)$$

Notons que cette écriture souvent pratique est cependant moins générale que la précédente, qui peut être utilisée même quand les ondes incidente, réfléchie ou transmise sont évanescentes. En particulier cette écriture en fonction des angles d'incidence et de transmission ne peut pas s'appliquer au cas des milieux absorbants et au cas de la réflexion totale interne.

12.2.3 Cas de la polarisation TM

On peut définir des facteurs r_p et t_p de la même manière en utilisant l'amplitude du champ magnétique \mathbf{H} qui est porté par \mathbf{e}_y en polarisation TM. On obtient alors par la même méthode :

$$r_p = \frac{n_2^2 \gamma_1 - n_1^2 \gamma_2}{n_2^2 \gamma_1 + n_1^2 \gamma_2} \quad t_p = \frac{2n_2^2 \gamma_1}{n_2^2 \gamma_1 + n_1^2 \gamma_2} \quad (12.10)$$

Pour des ondes propagatives, l'écriture en fonction des angles d'incidence et de transmission donne :

$$r_p = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad t_p = \frac{2n_2 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (12.11)$$

Remarques :

1) Dans certains cas, il peut être utile de définir des facteurs de transmission et de réflexion pour l'amplitude du champ électrique. En polarisation TM, les champs incident, réfléchi et transmis

ne sont cependant pas dans la même direction (voir figure 12.2). On a alors des facteurs r'_p et t'_p donnés par :

$$r'_p = r_p \quad t'_p = \frac{2n_1 n_2 \gamma_1}{n_2^2 \gamma_1 + n_1^2 \gamma_2} \quad (12.12)$$

2) Le signe des facteurs en polarisation TM dépend du choix du vecteur unitaire \mathbf{e} portant \mathbf{E} . On a choisi ici $\mathbf{e} = \mathbf{u} \times \mathbf{e}_y$, où \mathbf{u} est le vecteur donnant la direction et le sens de propagation de l'onde et \mathbf{e}_y est le vecteur portant le champ magnétique \mathbf{H} . Il s'agit de la convention "naturelle", la plus souvent utilisée.

12.3 Conservation de l'énergie à une interface

12.3.1 Facteurs de Fresnel en énergie

Pour déterminer les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel en énergie, il est nécessaire de calculer les puissances réfléchies et transmises, et donc d'utiliser le vecteur de Poynting. Le vecteur de Poynting (en valeur moyenne temporelle), pour une onde plane monochromatique polarisée rectilignement selon le vecteur unitaire \mathbf{e} , de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{e} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, s'écrit :

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\omega \mu_0} |E_0|^2 \operatorname{Re}(\mathbf{k})$$

Pour calculer les flux d'énergie associés aux champs incident, réfléchi et transmis à travers l'interface $z = 0$, seule la composante selon Oz du vecteur de Poynting est nécessaire :

$$\langle \Pi_z \rangle = \frac{1}{2\omega \mu_0} |E_0|^2 \operatorname{Re}(\gamma) \mathbf{e}_z$$

où γ est la composante selon Oz du vecteur d'onde. On définit les facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel en énergie (souvent appelés *réflectivité* et *transmittivité*) comme les rapports des flux à l'interface :

$$R = \left| \frac{\langle \Pi_z^r \rangle}{\langle \Pi_z^i \rangle} \right| \quad T = \left| \frac{\langle \Pi_z^t \rangle}{\langle \Pi_z^i \rangle} \right| \quad (12.13)$$

où $\langle \Pi_z^i \rangle$, $\langle \Pi_z^r \rangle$, $\langle \Pi_z^t \rangle$ désignent les composantes selon Oz du vecteur de Poynting des champs incident, réfléchi et transmis, respectivement. En utilisant l'expression du vecteur de Poynting pour une onde plane et la définition des facteurs de Fresnel en amplitude, on obtient le résultat suivant, valable pour les deux polarisations TE et TM :

$$R = |r|^2 \quad T = |t|^2 \frac{\operatorname{Re}(\gamma_2)}{\operatorname{Re}(\gamma_1)} \quad (12.14)$$

où r et t sont les facteurs de Fresnel en amplitude. Notons que ce résultat est valable si l'on utilise les facteurs de Fresnel en amplitude définis à partir du champ électrique dans les deux polarisations (il faut notamment utiliser le facteur t'_p en polarisation TM).

Le rapport $\operatorname{Re}(\gamma_2)/\operatorname{Re}(\gamma_1)$ qui apparaît dans l'expression de T joue un rôle important. Dans le cas où les ondes incidente et transmise sont propagatives, il est égal au rapport $n_2 \cos \theta_t / n_1 \cos \theta_i$

et traduit un effet géométrique dû au fait que la surface $z = 0$ n'est pas vue sous le même angle par les deux ondes. Dans le cas où l'onde transmise est évanescente (γ_2 est complexe, ou même imaginaire pur), le facteur $\text{Re}(\gamma_2)$ peut modifier fortement T par rapport à $|t|^2$. Par exemple, dans le cas de la réflexion totale interne discuté ci-dessous, ce facteur s'annule montrant que $T = 0$ (pas de flux d'énergie transmis) même dans un cas où $|t| \neq 0$ (amplitude du champ transmis non nulle).

12.3.2 Relation de conservation de l'énergie

Dans le cas d'un milieu incident transparent (n_1 réel), on peut vérifier facilement que la relation ci-dessous est satisfaite :

$$R + T = 1 \quad (12.15)$$

Cette relation traduit le conservation de l'énergie à une interface plane. Elle est valable dans les deux cas de polarisation TE et TM.

12.4 Conservation de l'énergie dans le cas d'une couche plane

Dans le cas d'une couche plane d'épaisseur finie éclairée par une onde plane, on peut définir des facteurs de réflexion et transmission globaux en énergie $\rho = |\langle \Pi_z^\rho \rangle / \langle \Pi_z^i \rangle|$ et $\tau = |\langle \Pi_z^\tau \rangle / \langle \Pi_z^i \rangle|$, dont la signification est indiquée sur la figure 12.3.

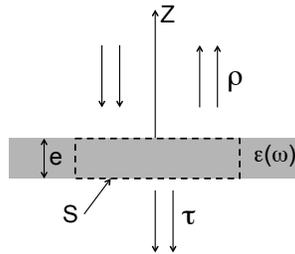


Figure 12.3: Définition des facteurs de réflexion et transmission globaux en énergie pour une couche plane.

Le bilan d'énergie intégré sur le volume $S \times e$ de la couche (indiqué en pointillés sur la figure 12.3) conduit à (application de l'Eq. 11.44) :

$$\langle \Pi_z^i \rangle S + \langle \Pi_z^\rho \rangle S - \langle \Pi_z^\tau \rangle S + P_{abs} = 0 \quad (12.16)$$

où P_{abs} est la puissance absorbée dans le volume $V = S \times e$. En divisant par $\langle \Pi_z^i \rangle S$, et en tenant compte du fait qu'avec notre convention pour l'orientation de l'axe Oz on a $\langle \Pi_z^i \rangle < 0$, $\langle \Pi_z^\rho \rangle > 0$ et $\langle \Pi_z^\tau \rangle < 0$ (et bien sûr $P_{abs} > 0$), on obtient :

$$\rho + \tau + a = 1 \quad (12.17)$$

où $a = |P_{abs} / (\langle \Pi_z^i \rangle S)|$ est l'absorptivité, définie comme le rapport de la puissance absorbée par unité de surface et du flux incident par unité de surface.

12.5 Discussion. Cas particuliers

12.5.1 Ordres de grandeur (incidence normale)

En incidence normale, il n'y a pas de distinction entre les polarisations TE et TM. Les facteurs de réflexion et transmission en amplitude s'écrivent simplement en fonction des indices de réfraction des deux milieux (éventuellement complexes) :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (12.18)$$

Réflexion sur un diélectrique

Prenons l'exemple de la réflexion sur le verre dans le visible. On a $n_1 = 1$ et $n_2 \simeq 1,5$, ce qui donne $r \simeq -0,2$ et une réflexion en énergie $R \simeq 4\%$. Dans le cas du silicium, on a dans le visible $n_2 \simeq 3,5$ ce qui donne $R \simeq 36\%$. On comprend ainsi l'intérêt du traitement antireflet des cellules photovoltaïques afin de ne pas perdre un tiers de l'énergie par simple réflexion.

D'une façon générale, il faut retenir que le contraste d'indice pilote la réflexion (de la même manière qu'un contraste d'impédance en acoustique ou en électronique engendre une réflexion).

Réflexion métallique

Dans le cas d'un métal, la constante diélectrique a une partie réelle négative. Pour l'indice complexe $n = n' + in''$, ceci signifie que $n'' > n'$. On a dans ce cas $R \simeq 80 - 95\%$. Pour un très bon métal (peu d'absorption volumique, ce qui signifie $\epsilon_r'' \approx 0$), $R \rightarrow 1$ (voir la discussion ci-dessous sur l'absorption par un corps opaque).

12.5.2 Réflexion totale interne

Examinons le cas particulier de deux milieux transparents avec $n_1 > n_2$. L'onde incidente se propage dans le milieu de plus fort indice. Dans ce cas, si l'angle d'incidence θ_i est supérieur à l'angle critique $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$, il n'y a pas d'onde propagative transmise. Une première façon de le comprendre est qu'il n'y a pas d'angle de transmission θ_t compatible avec les lois de Descartes dans ce cas. Une autre manière d'appréhender le phénomène est de calculer le vecteur d'onde transmis γ_2 : celui-ci est imaginaire pur, de la forme $\gamma_2 = i\text{Im}(\gamma_2)$. L'onde transmise est donc évanescence.

En termes énergétiques, puisque $\text{Re}(\gamma_2) = 0$, $|T|^2 = 0$: il n'y a pas de flux d'énergie transmis à travers l'interface. On a donc $R = 1$, et toute l'énergie est réfléchie, ce qui justifie l'appellation de réflexion totale. Cependant il faut bien garder à l'esprit que si le flux d'énergie transmis nul, le champ transmis n'est pas nul. Au voisinage de l'interface, l'onde évanescence pénètre dans le milieu 2, sur une profondeur donnée par $1/\text{Im}(\gamma_2)$. Cette profondeur peut être calculée en fonction de l'angle d'incidence, et diminue lorsque θ_i s'écarte de l'angle critique θ_c .

12.5.3 Dépendance angulaire des facteurs de réflexion

La dépendance en fonction de l'angle d'incidence θ_i des facteurs de réflexion de Fresnel en énergie est représentée sur la Fig. 12.4., dans le cas de la réflexion sur du verre dans le domaine visible ($n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$). En $\theta_i = 0$, on retrouve la valeur de 4% commune aux deux polarisations. Lorsque $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, les deux facteurs tendent vers 1. On retiendra qu'en incidence rasante, la réflectivité augmente fortement. C'est le reflet intense du coucher de soleil sur l'eau que chacun a observé depuis la plage. On observe aussi une annulation du facteur de réflexion en polarisation TM, pour un angle appelé *angle de Brewster*.

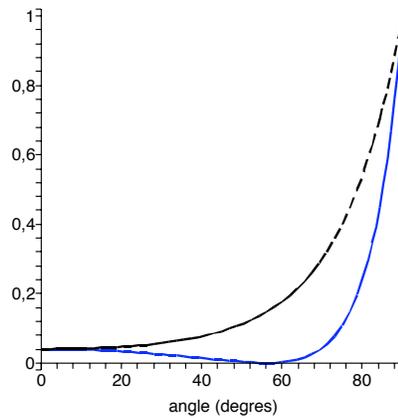


Figure 12.4: Facteurs de réflexion de Fresnel en énergie pour une onde se réfléchissant sur une surface de verre dans le visible ($n_1 = 1$, $n_2 = 1,5$). Pointillés (courbe noire) : polarisation TE. Trait continu (courbe bleue) : polarisation TM. En polarisation TM, on observe l'annulation du facteur de réflexion en polarisation TM à l'angle de Brewster.

L'angle de Brewster θ_B est donné par :

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (12.19)$$

Lorsqu'on éclaire une surface au voisinage de l'angle de Brewster, la lumière réfléchie est donc fortement polarisée rectilignement (dans la direction correspondant à la polarisation TE).

12.5.4 Absorption par un corps opaque

En conservant les notations de la figure 12.2, supposons que le milieu 1 soit le vide ou l'air considéré comme transparent ($n_1 = 1$), et que le milieu 2 soit milieu absorbant (n_2 est complexe, et donc $\gamma_2 = \gamma'_2 + i\gamma''_2$ est complexe). Le champ transmis est alors de la forme :

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_2 \exp(i\alpha x - i\gamma'_2 z) \exp(\gamma''_2 z) \quad (z < 0)$$

Ce champ décroît exponentiellement dans le matériau, avec une longueur caractéristique $1/\gamma''_2$. Dans le cas particulier de l'incidence normale ($\alpha = 0$), on a simplement $\gamma_2 = n_2 \omega/c = 2\pi n_2/\lambda$.

La longueur caractéristique de pénétration du champ transmis est alors $\delta = \lambda/(2\pi n_2'')$. C'est l'épaisseur de peau du matériau, que nous avons déjà rencontrée au chapitre 2. Dans un milieu absorbant, elle fixe l'ordre de grandeur de l'épaisseur sur laquelle le champ transmis s'annule dans le matériau.

Le corps est dit opaque à une fréquence donnée si δ est très inférieure à son épaisseur. On peut donc considérer ce milieu comme semi-infini du point de vue optique, et le traiter par une interface simple même si en pratique il s'agit d'une couche d'épaisseur finie. Notons que cette notion dépend de la fréquence. Par exemple, une lame de verre de 1 cm d'épaisseur est transparente dans le visible, mais opaque dans l'infrarouge pour $\lambda > 4 \mu\text{m}$.

Pour un corps opaque, le flux transmis à l'interface est totalement absorbé. On définit l'absorptivité du matériau comme le rapport du flux absorbé au flux incident (cette grandeur est utilisée par exemple pour calculer l'échauffement du matériau). Dans le cas d'une surface plane de corps opaque, l'absorptivité est donc simplement le facteur de transmission de Fresnel en énergie $T = 1 - R$.

Pour terminer, nous allons discuter l'absorption par un corps opaque dont l'indice complexe $n = n' + in''$ est tel que $n'' \gg n'$. Même si un tel matériau pourrait à première vue être qualifié de très absorbant, nous allons voir qu'une interface plane de ce matériau est plutôt réfléchissante. Le facteur de réflexion en énergie pour l'incidence normale s'écrit :

$$R = |r|^2 = \left| \frac{1 - n}{1 + n} \right|^2 = \frac{1 + n'^2 - 2n' + n''^2}{1 + n'^2 + 2n' + n''^2}$$

A la limite où $n'' \gg 1$ et $n'' \gg n'$, on obtient $R \simeq 1$ et donc $T \simeq 0$. Le corps est très réfléchissant et pas absorbant.

Ce paradoxe apparent provient du fait que lorsque n'' augmente, l'onde transmise pénètre de moins en moins dans le milieu. Une fraction de plus en plus grande de l'énergie est réfléchiée. L'absorption, même si elle a lieu pour un corps opaque dans une couche très mince sous l'interface, est un phénomène volumique. Pour être absorbée, l'onde doit pénétrer suffisamment dans le matériau. Cet effet s'observe, dans le domaine visible, lorsqu'on regarde une couche d'encre de chine (substance noire très absorbante) séchée sur une paroi en verre (et formant donc une couche plane) : elle présente en général un éclat métallique, signe d'une forte réflexion de la lumière incidente.

Références

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition, chapitre 1.
- [2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chapitre 7.

Chapitre 13

Propriétés optiques de la matière condensée

Objectifs

- Discuter de manière qualitative les processus d'absorption dans la matière condensée.
- Présenter quelques modèles de constante diélectrique permettant de décrire le comportement des métaux, des cristaux polaires et des semiconducteurs.

13.1 Mécanismes d'absorption dans l'eau liquide. Indice de réfraction

L'eau sous forme liquide présente des propriétés électromagnétiques très particulières. Elle est transparente dans le domaine des longueurs d'onde visibles, et très absorbante de part et d'autre de cette fenêtre spectrale. La figure 13.1 montre le spectre de l'indice complexe $n = n' + in''$ de l'eau sur une large gamme spectrale allant de l'UV aux radiofréquences.

Si l'on suit la courbe de la figure de droite à gauche, on observe différents régimes :

- Basses fréquences ($\nu < 100$ MHz, $\lambda > 1$ m)
Dans cette gamme spectrale, il n'y a pas de mécanisme induisant une absorption notable. Les propriétés de l'eau sont très proches des propriétés électrostatiques ($\nu = 0$). On a ainsi $n' \simeq 9$ et $n'' < 10^{-2}$ (ce qui donne $\epsilon_r \simeq 80$ qui est la valeur connue de la constante diélectrique de l'eau en électrostatique). Ce comportement à basse fréquence se retrouve pour beaucoup de matériaux solides (sauf certains matériaux ferroélectriques, qui peuvent présenter une absorption forte à basse fréquence).
- Domaine du GHz ($\lambda \simeq 1 - 10$ cm) :
Dans les liquides formés de molécules polaires (cas de l'eau), on observe une polarisation due à l'orientation des moments dipolaires permanents sous l'action du champ électrique.

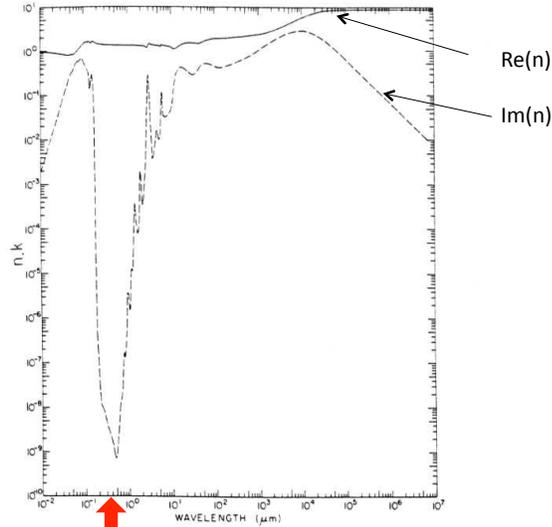


Fig. 1. Log-log plot n (solid line) and k (dashed line) versus wavelength in micrometers for water. ↑ visible

Figure 13.1: Variations de l'indice de l'eau en fonction de la longueur d'onde (en μm). Trait continu : partie réelle n' (notée n dans les ouvrages anglo-saxons). Trait pointillé : partie imaginaire n'' (notée k dans les ouvrages anglo-saxons).

En régime dynamique, le travail effectué par le champ sur les molécules est transformé en chaleur sous l'effet des collisions intermoléculaires. On a donc un mécanisme d'absorption.

Ce mécanisme est bien décrit par le modèle de relaxation de Debye. Supposons que l'on applique un champ statique, et que les molécules s'alignent dans la direction du champ électrique, créant ainsi une polarisation permanente \mathbf{P}_0 . Si l'on coupe brutalement le champ à l'instant $t = 0$, les collisions vont détruire progressivement l'alignement, et la polarisation va décroître exponentiellement avec un temps de relaxation τ : $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \exp(-t/\tau)$. Ceci conduit à une constante diélectrique de la forme :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\epsilon(0) - 1}{1 - i\omega\tau}$$

Pour l'eau pure, on a $\tau \simeq 10^{-11}$ s. On observe un effet important lorsque $\omega = 2\pi\nu \simeq 1/\tau$, soit $\lambda \simeq 10^4 \mu\text{m}$, ce qui correspond au premier pic très large sur la figure 13.1. C'est l'existence de ce pic d'absorption qui stoppa pendant la Seconde Guerre mondiale le développement de radars ayant des longueurs d'onde de plus en plus courte afin d'améliorer leur résolution. L'absorption dans l'air humide fait chuter rapidement la distance de propagation lorsque λ s'approche de $10^4 \mu\text{m}$.

- Domaine infrarouge ($\lambda \simeq 1 - 100 \mu\text{m}$) :

Dans cette gamme de longueurs d'onde, il devient possible d'exciter les modes de vibration intermoléculaires ($\lambda \simeq 10 - 100 \mu\text{m}$) puis intramoléculaires ($\lambda \simeq 1 - 10 \mu\text{m}$). Les premiers modes sont dus à des interactions entre molécules (oscillations d'une molécule dans le champ de ses voisines), et les seconds modes sont ceux de la molécule d'eau elle-même.

Les vibrations intermoléculaires produisent des pics plus larges que les modes de vibration intramoléculaires. Notons que cette distinction entre les deux types de vibrations n'a de sens que pour les liquides, dans lesquels la notion de molécules ayant des modes propres identifiables garde encore son sens (ce qui n'est plus le cas dans un solide).

- Domaine visible :
Dans ce domaine, ce sont habituellement les niveaux électroniques qui contribuent à l'absorption. Pour l'eau, la structure des niveaux électroniques fait que le visible correspond à une bande de transparence (notons l'échelle logarithmique, le creux de transparence correspond à plusieurs ordres de grandeur sur n''). Le domaine visible coïncide donc exactement avec la fenêtre de transparence de l'eau liquide. C'est une propriété remarquable à retenir.
- Domaine UV :
On observe un large pic d'absorption de l'eau vers $\lambda = 0,1 \mu\text{m}$, qui provient d'une excitation électronique très efficace de la molécule d'eau.

Un autre point à remarquer sur la Fig. 13.1 est que chaque pic d'absorption (pic dans le spectre de $n'' = \text{Im}(n)$) correspond à une variation de $n' = \text{Re}(n)$ ayant la forme indiquée sur la Fig. 11.1 du chapitre 11. C'est la manifestation du lien entre absorption et dispersion qui est décrite par les relations de Kramers-Kronig. Au voisinage d'un pic d'absorption, il y a toujours forte dispersion de la partie réelle de l'indice.

13.2 Cristaux polaires

Les propriétés optiques (visible et infrarouge) des cristaux polaires (dits aussi cristaux ioniques) ne peuvent être comprises qu'en considérant la structure cristalline et le fait que tous les atomes sont en interaction. Les modes de vibration collectifs des atomes du réseau cristallin sont responsables de l'absorption et de la dispersion.

Un modèle classique pour ce type de cristaux est celui de la chaîne linéaire d'atomes élastiquement liés (liés par des potentiels harmoniques). Les modes de vibration qui apparaissent se comportent comme des ondes caractérisées par un vecteur d'onde, une fréquence et un caractère de vibration longitudinal ou transverse. Ces modes peuvent être traités quantiquement, et sont alors appelés *phonons* (de même que le rayonnement électromagnétique quantifié conduit à la notion de photons). Un phonon peut alors être excité par le rayonnement électromagnétique et changer de niveau d'énergie, créant ainsi un mécanisme d'absorption pour le rayonnement. Les phonons susceptibles d'émettre et d'absorber le rayonnement électromagnétique sont les phonons dits "optiques", pour lesquels la vibration s'effectue à l'intérieur de la maille cristalline (voir Fig. 13.2 gauche). Lorsque la maille contient au-moins deux atomes ayant des charges opposées (cas d'un cristal polaire ou ionique), il apparaît un moment dipolaire oscillant responsable du couplage avec le champ électromagnétique. Les phonons pour lesquels la vibration de la maille s'effectue en bloc (et qui n'engendrent donc pas de moment dipolaire électrique) sont dits phonons "acoustiques". Ils sont responsables de la propagation des ondes sonores dans les solides. Pour un traitement détaillé, voir par exemple [1-2].

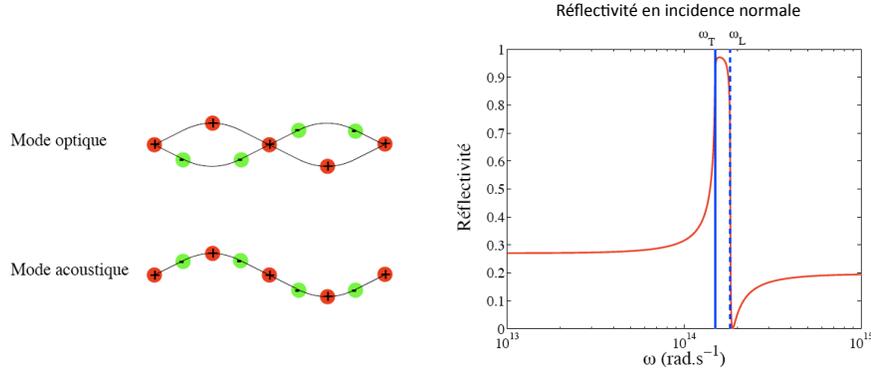


Figure 13.2: Gauche : représentation schématique des modes de vibrations associés aux phonons optiques et acoustiques. Droite : allure du spectre de réflectivité d'un cristal polaire. Les fréquences ω_T et ω_L sont en général dans le domaine infrarouge.

Dans le cadre de ce modèle, on peut calculer le moment dipolaire induit dans une maille par l'action d'un champ électromagnétique extérieur, et en déduire la densité de polarisation et la constante diélectrique (pour le calcul détaillé, voir par exemple la réf. [2], chapitre 27). On obtient :

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty \left[1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \right] \quad (13.1)$$

où ω_T et ω_L sont des fréquences caractéristiques des vibrations transverse et longitudinale du réseau cristallin. Le facteur Γ décrit les pertes d'énergie (transformation de l'énergie contenue dans les vibrations collectives en chaleur). L'expression de la constante diélectrique montre une résonance au voisinage de la fréquence ω_T . De plus, la zone spectrale $[\omega_T, \omega_L]$ correspond à une forte réflectivité du cristal polaire, avec l'allure typique tracée sur la Fig. 13.2 (courbe de droite).

En pratique, les différents paramètres de l'expression (13.1) sont obtenus expérimentalement pour chaque matériau [3]. La figure 13.3 montre les variations de l'indice complexe $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ en fonction de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega = c/\nu$ pour deux cristaux (NaCl et SiC). La résonance décrite par l'Eq. (13.1) s'observe au voisinage de $\lambda = 100 \mu\text{m}$ pour NaCl et de $\lambda = 10 \mu\text{m}$ pour SiC. Plus précisément, pour SiC on a $\omega_T = 793 \text{ cm}^{-1} = 12,6 \mu\text{m}$ qui donne la position du pic (les autres paramètres sont $\omega_L = 969 \text{ cm}^{-1}$, $\Gamma = 4,76 \text{ cm}^{-1}$ et $\epsilon_\infty = 6,7$) [3].

13.3 Métaux

13.3.1 Contribution des électrons libres

Les métaux (et semi-conducteurs dopés) contiennent des électrons libres (électrons de la bande de conduction). Ceux-ci jouent un rôle important pour les propriétés optiques dans le visible et le proche infrarouge. La constante diélectrique d'un métal modélisé par un gaz d'électrons libres est donnée par le modèle de Drude.

Dans ce modèle, on traite classiquement la dynamique d'un électron à la position \mathbf{r} soumis au

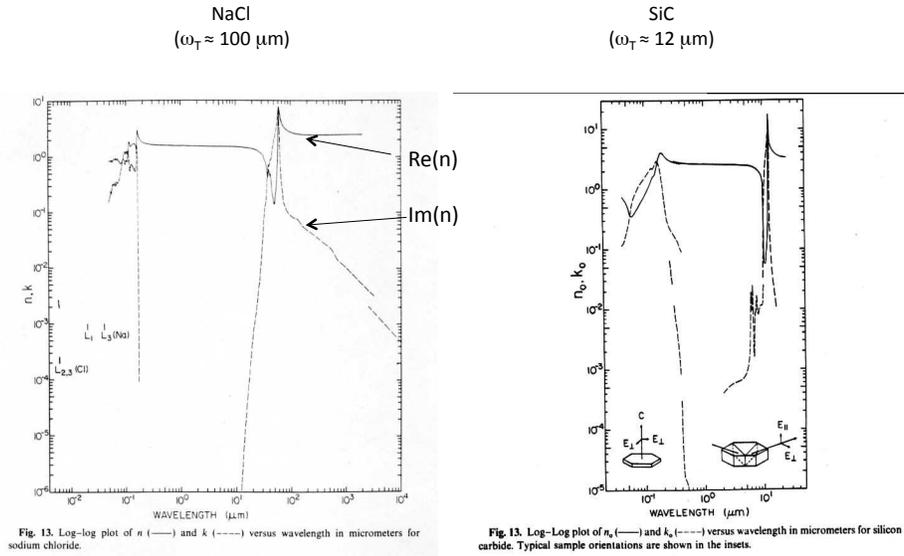


Fig. 13. Log-log plot of n (—) and k (---) versus wavelength in micrometers for sodium chloride.

Fig. 13. Log-Log plot of n_r (—) and k_i (---) versus wavelength in micrometers for silicon carbide. Typical sample orientations are shown in the insets.

Figure 13.3: Indices complexes de NaCl et de SiC (cristaux polaires) en fonction de la longueur d'onde. On observe les pics d'absorption, et la dispersion de $\text{Re}(n)$ associée, au voisinage de $\lambda = 100 \mu\text{m}$ pour NaCl et de $\lambda = 10 \mu\text{m}$ pour SiC.

champ électrique oscillant à la fréquence ω :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m \Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e \mathbf{E} \quad (13.2)$$

où m est la masse de l'électron et Γ modélise les pertes par collisions (phonons, défauts, impuretés). En régime monochromatique, on écrit $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ et on cherche une solution sous la forme $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \exp(-i\omega t)$. On obtient :

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e \mathbf{E}_0}{m(\omega^2 + i\Gamma\omega)} \quad (13.3)$$

La densité de polarisation s'écrit $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$, avec n la densité volumique d'électrons libres et $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}_0$ le moment dipolaire associé à un électron. En utilisant $\mathbf{P} = \epsilon_0[\epsilon_r(\omega) - 1]\mathbf{E}_0$, on obtient l'expression de la constante diélectrique du modèle de Drude :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (13.4)$$

où $\omega_p^2 = ne^2/m\epsilon_0$ est la pulsation de plasma.

L'application du modèle de Drude à la modélisation de la réflectivité de l'aluminium est présenté sur la Fig. 13.4. Pour $\omega < \omega_p$, le métal est très réfléchissant. La réflectivité chute pour $\omega > \omega_p$ (le matériau tend à devenir transparent pour $\omega \gg \omega_p$).

13.3.2 Transitions inter-bandes

Les propriétés des métaux dans le domaine visible ne peuvent pas toutes être décrites par le modèle de Drude. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la pulsation de plasma étant

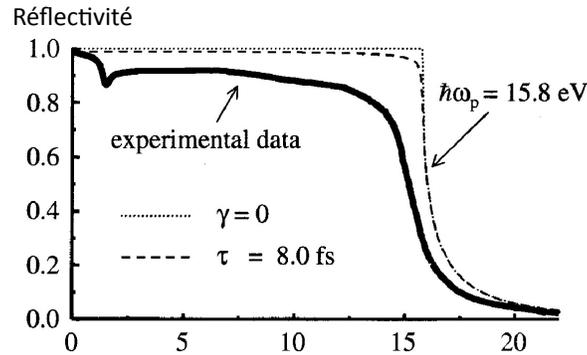


Figure 13.4: Spectre de réflectivité d'une surface plane d'aluminium (ligne continue). La courbe en pointillés est obtenue avec le modèle de Drude avec $\tau = 1/\Gamma = 8$ fs (les pointillés fins correspondent au calcul effectué en négligeant les pertes, $\Gamma = 0$).

dans le domaine UV (par exemple pour l'or on a $\omega_p = 7,25 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1} = 138 \text{ nm}$), les métaux de Drude sont tous très réfléchissants dans le visible. Or tous les métaux ne sont pas des miroirs à spectre plat. Certains métaux sont colorés (en réflexion le cuivre est rouge, l'or est jaune) ce qui traduit d'autres mécanismes d'absorption du rayonnement.

Les spectres de réflectivité de différents métaux (Cu, Au, Ag) sont présentés sur la Fig. 13.5. On remarque que contrairement au cas de l'aluminium, ces métaux ont une réflectivité qui chute bien avant ω_p .

Cette chute de la réflectivité s'explique par le fait que dans ces métaux des transitions inter-bandes sont possibles à des énergies correspondant aux longueurs d'onde du visible. La structure de bandes du cuivre est représentée sur la Fig. 13.5. Les électrons des bandes d peuvent absorber un photon visible et effectuer une transition vers la bande de conduction. Ce processus a une probabilité importante car la densité d'états électroniques est élevée dans la zone où les bandes d sont quasiment horizontales. C'est ce mécanisme qui est responsable de la couleur rouge du cuivre massif (ou de la couleur jaune de l'or massif). Notons que pour des métaux comme l'argent, le rôle des transitions inter-bandes peut être pris en compte de manière effective en utilisant une valeur de $\epsilon_r(\omega \rightarrow \infty)$ différente de 1 dans le modèle de Drude. On écrit alors la constante diélectrique sous la forme $\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty - \omega_p^2/(\omega^2 + i\Gamma\omega)$, la valeur de ϵ_∞ devant être ajustée sur des données expérimentales [3].

13.4 Semiconducteurs

Dans un isolant ou un semiconducteur, la bande la plus haute peuplée à $T = 0$ K est pleine, et porte le nom de bande de valence. La bande de conduction (bande située en énergie au-dessus de la bande de valence) est vide. Il n'y a pas de conduction électrique, une bande pleine ou une bande vide ne pouvant pas engendrer un courant électrique. Dans un métal, la bande de conduction est partiellement remplie même à $T = 0$ K, ce qui permet la conduction électrique. L'énergie séparant la bande de valence et la bande de conduction est appelée énergie de gap,

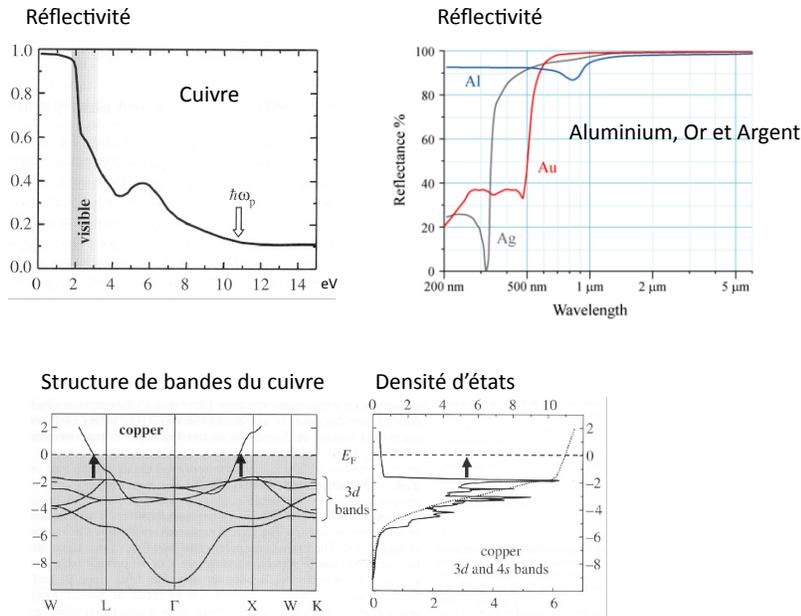


Figure 13.5: Haut : réflectivité de surfaces planes de cuivre, d'or et d'argent. Bas : structure de bandes et densité d'états électroniques dans le cas du cuivre. Les transitions interbandes indiquées par les flèches verticales sont responsables de l'absorption dans le visible, et de la coloration rouge du cuivre.

et notée E_g . Dans un isolant, E_g est trop élevée devant $k_B T$ pour que même en chauffant le matériau, on puisse porter des électrons de la bande de valence à la bande de conduction. Dans un semiconducteur, $k_B T$ peut suffire à peupler légèrement la bande de conduction, et donc à rendre le matériau conducteur (d'où l'appellation de "semiconducteur"). Les notions de bande de valence, de bande de conduction et d'énergie de gap sont illustrées sur la Fig. 13.6.

Concernant les propriétés optiques, l'énergie de gap a un rôle essentiel. Lorsque $\hbar\omega > E_g$, un électron peut absorber un photon en effectuant une transition de la bande de valence à la bande de conduction. C'est le mécanisme principal d'interaction entre la lumière et un semiconducteur intrinsèque (non dopé). On retiendra donc qu'un semiconducteur intrinsèque est transparent pour les fréquences $\omega < E_g/\hbar$, et absorbant (ou fortement réfléchissant) pour $\omega > E_g/\hbar$. Pour le silicium, on a $E_g \simeq 1,1$ eV, de telle sorte que le silicium est transparent dans l'infrarouge, et absorbant dans le visible. De plus des semiconducteurs comme Si ou Ge présentent de fortes valeurs de $\text{Re}(n)$ dans le visible (de l'ordre de 3,5 à 4), ce qui est très utile pour certaines applications de photonique (mais est aussi un défaut pour d'autres applications comme la conception de cellules photovoltaïques car il faut dans ce cas réduire la réflexion en utilisant un traitement antireflet).

Finalement, rappelons qu'il est possible de doper un semiconducteur en introduisant des impuretés jouant le rôle de donneurs ou accepteurs d'électrons. On peuple alors artificiellement la bande de conduction avec des électrons (semiconducteurs dopés n) ou la bande de valence avec des trous (semiconducteurs dopés p). Ces bandes partiellement remplies de porteurs de charges

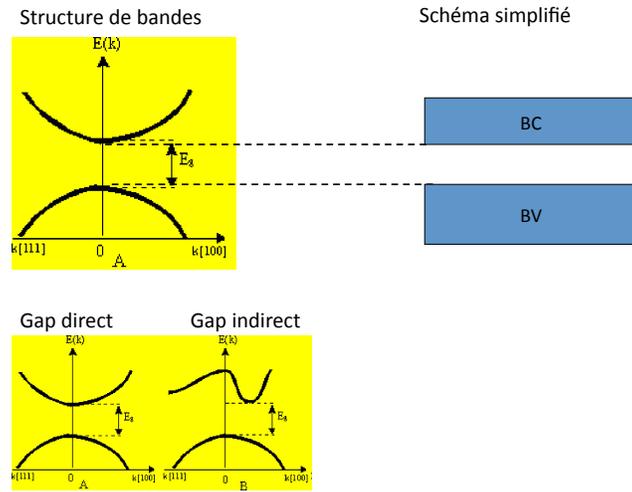


Figure 13.6: Haut : allure des bandes de valence (BV) et de conduction (BC) d'un semiconducteur, et schéma simplifié faisant apparaître les deux bandes et l'énergie de gap E_g . Bas : semiconducteurs à gap direct et à gap indirect.

contribuent alors aux propriétés optiques comme les électrons libres d'un métal. On peut décrire ces contributions avec le modèle de Drude. La différence essentielle avec un métal est que la densité de porteurs n (et donc l'équivalent de la fréquence plasma) est contrôlée par le dopage.

Références

- [1] C. Kittel, *Physique de l'Etat Solide* (Dunod, Paris, 1998).
- [2] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Physique des Solides* (EDP Sciences, Les Ulis, 2002).
- [3] E.D. Palik (ed.), *Handbook of Optical Constants of Solids* (Academic Press, Boston, 1991).

Chapitre 14

Optique des cristaux anisotropes

Objectifs

- Etudier les propriétés des ondes planes monochromatiques dans les milieux anisotropes.
- Introduire les équations et les techniques graphiques permettant de déterminer les directions de propagation et de polarisation.

14.1 Tenseur diélectrique

L'optique des milieux matériels continus repose sur les équations de Maxwell macroscopiques et les relations constitutives qui font intervenir la constante diélectrique et la perméabilité magnétique relative. Dans les cristaux, la réponse électrique du milieu (polarisation) est en général anisotrope, et nous allons étudier les conséquences de cette anisotropie. Nous supposons dans tout le chapitre que les milieux sont non magnétiques ($\mu_r = 1$).

14.1.1 Définition d'un milieu anisotrope

Un milieu est anisotrope (électriquement) si à l'intérieur du milieu la densité de polarisation \mathbf{P} et le vecteur \mathbf{D} n'ont pas la même direction que \mathbf{E} .

Notons que ceci n'exclut pas que selon des axes particuliers, \mathbf{P} et \mathbf{E} soient alignés, mais la valeur de la constante diélectrique est alors différente selon ces axes. Prenons un exemple simple à deux dimensions : supposons que selon un axe (noté Ox), on ait $\mathbf{P}_x = \epsilon_0(\epsilon_1 - 1)\mathbf{E}_x$ et que selon un axe perpendiculaire (noté Oy), on ait $\mathbf{P}_y = \epsilon_0(\epsilon_2 - 1)\mathbf{E}_y$, avec $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ (voir figure 14.1). On voit qu'alors, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$.

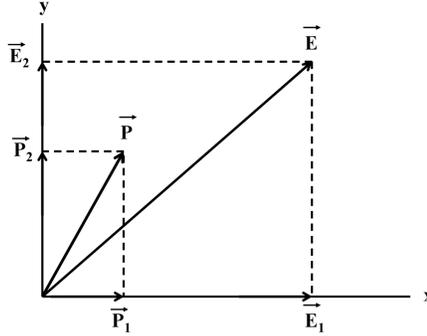


Figure 14.1: Exemple de milieu anisotrope avec deux valeurs différentes de la constante diélectrique selon les axes Ox et Oy .

14.1.2 Définition du tenseur diélectrique

Dans un milieu linéaire et anisotrope, la relation entre \mathbf{D} et \mathbf{E} (ou entre \mathbf{P} et \mathbf{E}) est tensorielle. On écrit :

$$D_i = \sum_j \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j \quad \text{avec} \quad i, j = x, y, z \quad (14.1)$$

Les neuf coefficients ϵ_{ij} constituent le *tenseur diélectrique* ϵ (dit aussi tenseur des permittivités relatives).

Remarques :

- On définit également le tenseur des susceptibilités χ tel que la densité de polarisation s'écrive :

$$P_i = \sum_j \epsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (14.2)$$

On a donc $\epsilon_{ij} = 1 + \chi_{ij}$.

- Comme dans le cas des milieux isotropes, afin de décrire la dispersion des milieux qui ne peut en général pas être négligée dans le domaine optique, les relations ci-dessus sont à comprendre comme étant écrites dans le domaine fréquentiel. A des fréquences pour lesquelles on ne peut pas négliger l'absorption, ϵ et χ sont complexes.
- Dans un milieu isotrope, on a $\epsilon_{ij} = \epsilon_r \delta_{ij}$ où ϵ_r est la constante diélectrique scalaire que nous avons utilisée précédemment.

14.1.3 Propriétés du tenseur diélectrique

On suppose que les matériaux étudiés dans ce chapitre sont non absorbants. En l'absence de champ magnétique externe, le tenseur diélectrique ϵ est symétrique :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (14.3)$$

Cette propriété découle de relations de symétrie fondamentales des coefficients cinétiques en thermodynamique (relations d'Onsager, voir par exemple [2]). Une conséquence directe est que le tenseur diélectrique n'a que 6 composantes indépendantes.

Le tenseur diélectrique peut être diagonalisé, et possède une base de vecteurs propres orthogonaux. Il existe donc un système d'axes orthogonaux pour lequel le tenseur ϵ est diagonal. Ces axes définissent les *directions principales* (on parle alors d'axes principaux). Dans le système d'axes principaux, on a donc simplement :

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x \quad D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y \quad D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z \quad (14.4)$$

Ces relations montrent qu'il suffit finalement de 3 coefficients pour déterminer la réponse diélectrique du milieu.

14.1.4 Classification des milieux

On classe les milieux anisotropes selon la forme du tenseur diélectrique dans le système d'axes principaux.

Milieux isotropes

La forme du tenseur diélectrique est la suivante :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_r \end{pmatrix}$$

Le système est tout simplement décrit par le scalaire ϵ_r qui est la constante diélectrique habituelle des milieux isotropes (telle que $\epsilon_r = n^2$, n étant l'indice optique). Les milieux amorphes et les cristaux à maille cubique sont isotropes du point de vue optique.

Milieux anisotropes uniaxes

C'est le cas des cristaux pour lesquels un des axes (par exemple l'axe Oz) a une symétrie cristalline d'ordre ≥ 3 (systèmes trigonal, tétragonal et hexagonal). Le tenseur diélectrique a alors la forme suivante :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

L'axe particulier Oz est appelé *axe optique* du cristal.

Milieux anisotropes biaxes

C'est le cas des cristaux de basse symétrie (systèmes orthorhombique, monoclinique et triclinique). Le tenseur diélectrique a alors la forme suivante :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z.$$

14.2 Ondes planes monochromatiques dans les milieux anisotropes

14.2.1 Relations entre \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{H}

On s'intéresse à la propagation dans le milieu d'une onde plane monochromatique de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[in(\omega/c) \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}]$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, \mathbf{s} est le vecteur unitaire dans la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} et n est l'indice qui décrit la *vitesse de phase* (on suppose le milieu non absorbant et l'indice réel).

Supposons qu'une telle onde plane puisse exister dans le milieu, et cherchons ses propriétés, sans supposer comme dans le cas isotrope que \mathbf{D} et \mathbf{E} sont alignés. De l'équation $\mathbf{rot} \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}$, on déduit

$$\mathbf{D} = -(\mathbf{k}/\omega) \wedge \mathbf{H} \quad (14.5)$$

De même, la relation $\mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}$ implique

$$\mathbf{H} = \mathbf{k}/(\omega \mu_0) \wedge \mathbf{E} \quad (14.6)$$

Ces relations montrent en premier lieu que \mathbf{k} , \mathbf{D} et \mathbf{H} sont perpendiculaires, et que \mathbf{H} est aussi perpendiculaire à \mathbf{E} . Comme \mathbf{H} est perpendiculaire aux trois vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{D} et \mathbf{E} , on en déduit que ces trois vecteurs sont dans le même plan.

La relation (14.5) montre que \mathbf{D} et \mathbf{H} sont transverses par rapport à \mathbf{k} (ce qui n'est pas le cas de \mathbf{E}), et que le trièdre $(\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{s})$ est direct.

Le vecteur de Poynting (que nous noterons \mathbf{R} dans ce chapitre), qui donne la direction du flux d'énergie, est $\mathbf{R} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$. Le trièdre $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{R})$ est donc aussi direct. La disposition relative de ces différents vecteurs est représentée sur la figure 14.2.

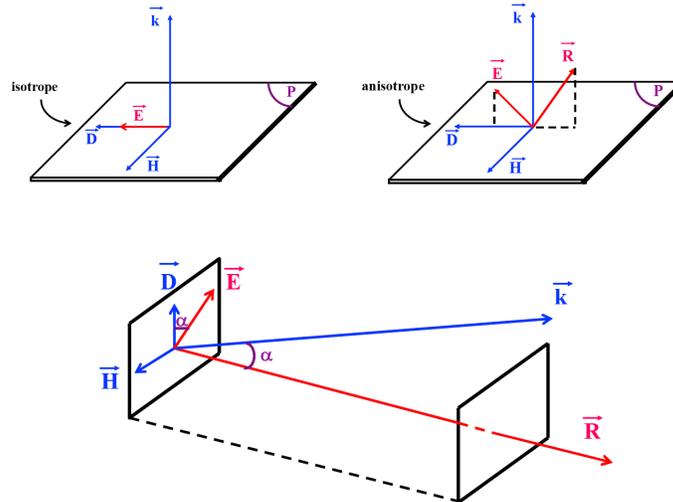


Figure 14.2: Directions respectives des différents champs dans un milieu anisotrope. \mathbf{k} indique la direction du vecteur d'onde et \mathbf{R} celle du vecteur de Poynting qui ne sont pas colinéaires.

Contrairement au cas des milieux isotropes, les directions du vecteur d'onde et du vecteur de Poynting ne coïncident pas. La phase et l'énergie de l'onde se propagent donc dans des directions différentes. On remarque que le vecteur \mathbf{R} , qui est perpendiculaire à \mathbf{H} , est dans le même plan que les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{D} et \mathbf{k} . Il fait avec le vecteur \mathbf{k} un angle égal à celui que fait \mathbf{E} avec \mathbf{D} (angle noté α sur la figure 14.2).

Finalement, en combinant les relations (14.5) et (14.6), on obtient :

$$\mathbf{D} = \frac{-\mathbf{k}}{\omega} \wedge \left(\frac{\mathbf{k}}{\omega\mu_0} \wedge \mathbf{E} \right) = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}] = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_\perp \quad (14.7)$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et on a noté \mathbf{E}_\perp la composante transverse de \mathbf{E} par rapport à la direction \mathbf{s} (direction du vecteur d'onde). Cette relation sera utile dans la suite.

14.2.2 Vitesse de phase et vitesse de l'énergie

La vitesse de phase est définie par l'indice réel : $\mathbf{v}_\phi = (c/n)\mathbf{s}$. Elle pointe dans la direction du vecteur \mathbf{k} et a comme module c/n . La vitesse de l'énergie est quant à elle définie par $\mathbf{v}_E = \langle \mathbf{R} \rangle / \langle U \rangle$, où $\langle \dots \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle, \mathbf{R} est le vecteur de Poynting et U la densité volumique d'énergie.

On a déjà vu que $\langle \mathbf{R} \rangle = 1/2 \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*)$, où $*$ désigne le complexe conjugué. La densité d'énergie volumique moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*}{2} \right) + \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{Re} \left[\mathbf{E} \cdot \left(\frac{-\mathbf{k}}{\omega} \wedge \mathbf{H}^* \right) \right] + \frac{1}{4} \text{Re} \left[\left(\frac{\mathbf{k}}{\omega} \wedge \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{H}^* \right] \\ &= \frac{\mathbf{k}}{\omega} \cdot \langle \mathbf{R} \rangle \end{aligned} \quad (14.8)$$

Dans ces relations, on a utilisé le fait que le milieu est non absorbant, de telle sorte que \mathbf{k} est réel. On peut exprimer le module de la vitesse de l'énergie de façon simple :

$$v_E = \frac{|\langle \mathbf{R} \rangle|}{\langle U \rangle} = \frac{|\langle \mathbf{R} \rangle|}{(n/c) \mathbf{s} \cdot \langle \mathbf{R} \rangle} = \frac{|\langle \mathbf{R} \rangle|}{(n/c) \cos \alpha |\langle \mathbf{R} \rangle|} = \frac{v_\phi}{\cos \alpha}$$

avec α l'angle défini sur la figure 14.2. On a donc la relation suivante liant les modules des vitesses de phase et de l'énergie :

$$v_\phi = v_E \cos \alpha \quad (14.9)$$

14.2.3 Equation de Fresnel (équation aux indices)

Après avoir étudié les propriétés d'une onde plane monochromatique dans un milieu anisotrope, nous allons maintenant établir la condition d'existence d'une telle onde.

Nous avons établi précédemment la relation (14.7) :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_\perp$$

On utilise le repère (Ox, Oy, Oz) défini par les axes principaux. La composante j de cette équation ($j = x, y, z$) est :

$$D_j = \epsilon_0 n^2 [E_j - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})s_j]$$

ce qui s'écrit aussi

$$\epsilon_j E_j = n^2 [E_j - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s})s_j] \quad (14.10)$$

où les ϵ_j sont les composantes diagonales du tenseur diélectrique ϵ . Les relations (14.10) définissent un système de 3 équations linéaires et homogènes pour les composantes (E_x, E_y, E_z) du champ électrique. Pour avoir des solutions autres que la solution nulle, le déterminant doit s'annuler. La condition d'annulation du déterminant définit une relation implicite entre les ϵ_j , les s_j et n . Cette relation est l'analogie de la relation de dispersion $\mathbf{k} = n(\omega)\omega/c\mathbf{s}$ que nous avons vue pour les milieux isotropes.

Afin d'écrire explicitement cette relation, on peut suivre la démarche suivante. De l'équation (14.10), on tire

$$E_j = \frac{n^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}) s_j}{n^2 - \epsilon_j} \quad (14.11)$$

En multipliant chaque membre par s_j , puis en sommant sur $j = (x, y, z)$, on obtient

$$\frac{n^2 s_x^2}{n^2 - \epsilon_x} + \frac{n^2 s_y^2}{n^2 - \epsilon_y} + \frac{n^2 s_z^2}{n^2 - \epsilon_z} = 1$$

En soustrayant $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$ à cette équation, on aboutit à

$$\frac{\epsilon_x s_x^2}{n^2 - \epsilon_x} + \frac{\epsilon_y s_y^2}{n^2 - \epsilon_y} + \frac{\epsilon_z s_z^2}{n^2 - \epsilon_z} = 0$$

Cette relation entre les ϵ_j , les s_j et n est la relation recherchée. Il est habituel de l'écrire un peu différemment, en définissant les *indices principaux* $n_x^2 = \epsilon_x$, $n_y^2 = \epsilon_y$ et $n_z^2 = \epsilon_z$. On obtient le résultat final, connu sous le nom d'équation de Fresnel :

$$\frac{n_x^2 s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{n_y^2 s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{n_z^2 s_z^2}{n^2 - n_z^2} = 0 \quad (14.12)$$

L'équation de Fresnel est un équation quadratique en n^2 (on peut s'en convaincre en multipliant chaque terme par le produit des dénominateurs). Seules les valeurs $n > 0$ ont un sens physique. Pour une direction \mathbf{s} donnée, on a donc *deux solutions* à l'équation de Fresnel.

Une fois déterminées les deux valeurs possible n' et n'' , on peut obtenir les rapport des composantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{D} en utilisant l'Eq. (14.11) :

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{n_x^2 - n^2}{n_y^2 - n^2} \frac{s_y}{s_x} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \frac{D_y}{D_x}$$

et

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{n_x^2 - n^2}{n_z^2 - n^2} \frac{s_z}{s_x} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \frac{D_z}{D_x}$$

Ces rapports des composantes des champs étant fixés et réels (pour un milieu non absorbant), on en déduit que les champs \mathbf{E} et \mathbf{D} sont *polarisés rectilignement*.

Conclusion :

Pour une direction du vecteur d'onde \mathbf{s} donnée, on a deux solutions (deux valeurs de l'indice n et donc de la vitesse de phase) correspondant à deux ondes polarisées rectilignement. Nous allons voir qu'en plus, ces deux directions de polarisation sont perpendiculaires.

14.3 Constructions géométriques

Il existe différentes constructions géométriques permettant de déterminer la vitesse de propagation et la structure des ondes dans les milieux anisotropes.

14.3.1 Ellipsoïde des indices

L'écriture de la relation (14.7) pour la composante j donne

$$D_j = \epsilon_0 n^2 E_j - \epsilon_0 n^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}) s_j$$

En utilisant le repère défini par les axes principaux, on en déduit

$$D_j = \frac{n^2 D_j}{\epsilon_j} - \epsilon_0 n^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}) s_j$$

En multipliant par D_j et en sommant sur $j = (x, y, z)$, on obtient

$$\sum_j D_j^2 (1 - n^2/\epsilon_j) = -\epsilon_0 n^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{s}) \sum_j s_j D_j = 0$$

La dernière égalité provient du fait que $\sum_j s_j D_j = \mathbf{s} \cdot \mathbf{D} = 0$ puisque \mathbf{D} est normal à \mathbf{s} . On a donc

$$D^2 = \sum_j \frac{n^2}{n_j^2} D_j^2$$

En posant $x = n(D_x/D)$, $y = n(D_y/D)$ et $z = n(D_z/D)$, le point M de coordonnées (x, y, z) décrit une surface d'équation

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (14.13)$$

Cette équation définit un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde des indices*. Cette ellipsoïde a pour axes les axes principaux du milieu anisotrope, et des 1/2 axes de longueur n_x , n_y et n_z .

Propriétés de l'ellipsoïde des indices (voir figure 14.3)

- Pour une direction \mathbf{s} donnée, le plan d'onde (plan normal à \mathbf{s} passant par l'origine) coupe l'ellipsoïde selon une ellipse dont les deux axes portent les deux champs solutions \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' . Ces deux axes sont perpendiculaires : on a donc $\mathbf{D}' \perp \mathbf{D}''$.
- Les longueurs des demi-axes (distances de l'origine à M' et M'' sur la Fig. 14.3) donnent les valeurs des indices n' et n'' solutions de l'équation de Fresnel.

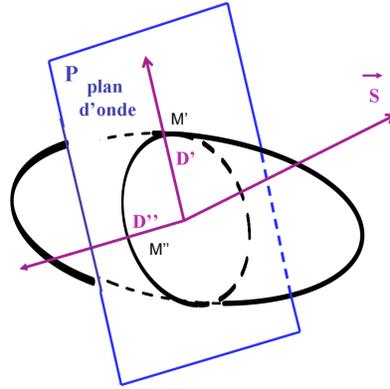


Figure 14.3: Construction utilisant l'ellipsoïde des indices.

- Les vecteurs champs électriques \mathbf{E}' et \mathbf{E}'' ont la direction de la normale à l'ellipsoïde aux points M' et M'' .
- Comme tout ellipsoïde, l'ellipsoïde des indices possède deux sections circulaires. Les normales \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 à ces sections définissent les *axes optiques* du cristal. Dans ces sections normales aux axes optiques, toutes les directions de \mathbf{D} sont possibles, et ont le même indice.

14.3.2 Surface des indices

En prenant une origine O dans le milieu, on considère deux points N' et N'' dans la direction de \mathbf{s} , tels que $ON' = n'$ et $ON'' = n''$. Lorsque \mathbf{s} prend toutes les directions possibles, N' et N'' engendrent une surface à deux nappes appelée *surface des indices*.

L'équation de cette surface compliquée s'obtient à partir de l'équation de Fresnel :

$$(n^2 - n_y^2)(n^2 - n_z^2)n_x^2 s_x^2 + (n^2 - n_x^2)(n^2 - n_z^2)n_y^2 s_y^2 + (n^2 - n_x^2)(n^2 - n_y^2)n_z^2 s_z^2 = 0$$

Cherchons la section de cette surface par le plan (Ox, Oy) . Dans cette section, \mathbf{s} varie dans le plan xy , et donc $s_z = 0$. On obtient :

$$(n^2 - n_z^2)[(n^2 - n_y^2)n_x^2 s_x^2 + (n^2 - n_x^2)n_y^2 s_y^2] = 0$$

Cette équation peut être satisfaite dans deux cas.

Premier cas : $n_z^2 - n^2 = 0$. Comme $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$ et $z = 0$ dans la section considérée, cette condition s'écrit aussi $x^2 + y^2 = n_z^2$. Cette équation est celle d'un cercle de rayon n_z .

Deuxième cas : $[(n^2 - n_y^2)n_x^2 s_x^2 + (n^2 - n_x^2)n_y^2 s_y^2] = 0$. En utilisant le fait que $x = n s_x$ et $y = n s_y$, cette condition se réécrit

$$(n^2 - n_y^2)n_x^2 \frac{x^2}{n^2} + (n^2 - n_x^2)n_y^2 \frac{y^2}{n^2} = 0$$

qui donne finalement

$$\frac{x^2}{n_y^2} + \frac{y^2}{n_x^2} = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse de demi-axes n_x et n_y . La surface des indices est représentée sur la figure 14.4.

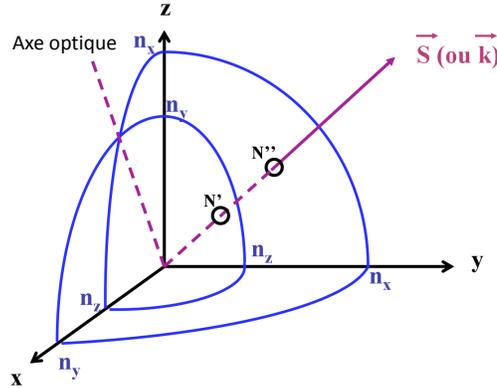


Figure 14.4: Représentation tridimensionnelle de la surface des indices dans le cas où les indices principaux vérifient $n_z < n_y < n_x$. On ne représente que 1/8 de la figure.

Dans le plan (Ox, Oz) , l'ellipse et le cercle se coupent en quatre points, qui définissent deux droites. Ces deux droites sont les deux *axes optiques* du cristal. Une propriété importante est que la direction de la normale à la surface des indices aux points N' et N'' (Fig. 14.4) indique la direction du vecteur de Poynting \mathbf{R} .

14.3.3 Surface d'onde (ou surface des vitesses)

On peut suivre la même démarche en utilisant la direction du vecteur de Poynting plutôt que celle du vecteur d'onde. La direction du vecteur de Poynting est celle du flux d'énergie et donc d'un rayon lumineux au sens de l'optique géométrique. On définit le vecteur unitaire \mathbf{t} dans la direction du vecteur de Poynting moyen $\langle \mathbf{R} \rangle$. On utilise la vitesse de l'énergie v_E plutôt que l'indice n . On a alors une relation qui est l'équivalent de (14.7) et qui s'écrit :

$$\mathbf{E} = \mu_0 v_E^2 [\mathbf{D} - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t}] = \mu_0 v_E^2 \mathbf{D}_\perp \quad (14.14)$$

où \mathbf{D}_\perp est la composante transverse de \mathbf{D} par rapport au vecteur unitaire \mathbf{t} . On peut ensuite suivre une démarche similaire à celle conduisant à l'équation de Fresnel (14.12), pour obtenir une expression équivalente faisant intervenir la direction du vecteur de Poynting \mathbf{t} , la vitesse de l'énergie v_E et les vitesses normales $v_i = c/n_i$, avec $i = x, y, z$:

$$\frac{v_x^2 t_x^2}{v_E^2 - v_x^2} + \frac{v_y^2 t_y^2}{v_E^2 - v_y^2} + \frac{v_z^2 t_z^2}{v_E^2 - v_z^2} = 0 \quad (14.15)$$

En procédant comme pour la surface des indices, on construit ainsi la *surface d'onde*, dont l'allure est représentée sur la figure 14.5.

Cette surface peut s'interpréter comme le lieu des points que la lumière provenant d'une source ponctuelle placée à l'origine atteint au bout d'un temps unitaire.

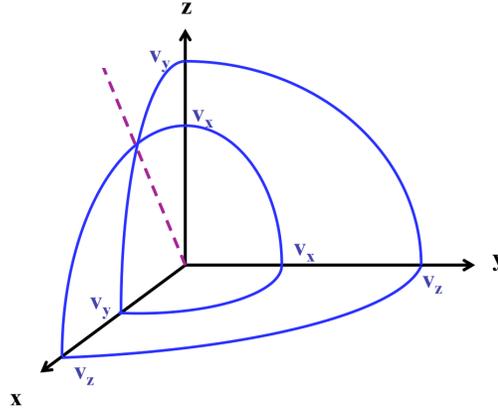


Figure 14.5: Représentation tridimensionnelle de la surface d'onde dans le cas où les vitesses principales $v_i = c/n_i$ vérifient $v_x < v_y < v_z$.

14.4 Cas de milieux uniaxes

Les cristaux trigonaux, tétraonaux et hexagonaux, qui ont un axe de symétrie d'ordre ≥ 3 , sont *uniaxes*. Dans les milieux uniaxes, deux des indices principaux sont égaux. Dans le cas où l'axe Oz est l'axe optique, on note alors :

$$n_o = n_x = n_y \quad \text{et} \quad n_e = n_z$$

n_o est appelé l'*indice ordinaire*, et n_e est appelé l'*indice extraordinaire*.

Le tenseur diélectrique dans le repère défini par les axes principaux s'écrit alors : $\epsilon = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$

Le milieu uniaxe est dit positif si $n_e > n_o$ (ex : le quartz) et négatif si $n_o > n_e$ (ex : la calcite). La différence $|n_e - n_o|$ est appelée la *biréfringence*.

14.4.1 Ellipsoïde des indices. Onde ordinaire et extraordinaire

L'ellipsoïde des indices dans le cas d'un milieu uniaxe d'axe optique (Oz) est un ellipsoïde de révolution autour de (Oz). On le représente généralement en coupe, comme sur la Fig. 14.6, la coupe correspondant à une section par un plan contenant \mathbf{k} et l'axe optique.

Des propriétés de l'ellipsoïde des indices, on peut déduire pour un vecteur \mathbf{k} donné les directions des vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} correspondant aux deux ondes polarisées rectilignement pouvant se propager (modes propres), et les indices n' et n'' correspondants. On obtient une onde dite *ordinaire* pour laquelle l'indice de réfraction est n_o , et les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} sont colinéaires. On obtient également une autre onde dite *extraordinaire* pour laquelle l'indice de réfraction $n_e(\theta)$ dépend de la direction de propagation, θ étant l'angle entre \mathbf{k} et l'axe optique. Pour cette onde, les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} ne sont pas colinéaires (on rappelle que \mathbf{E} est dirigé selon la normale à l'ellipsoïde, au point d'intersection entre l'axe portant \mathbf{D} et l'ellipsoïde). La valeur de l'indice $n_e(\theta)$ s'obtient

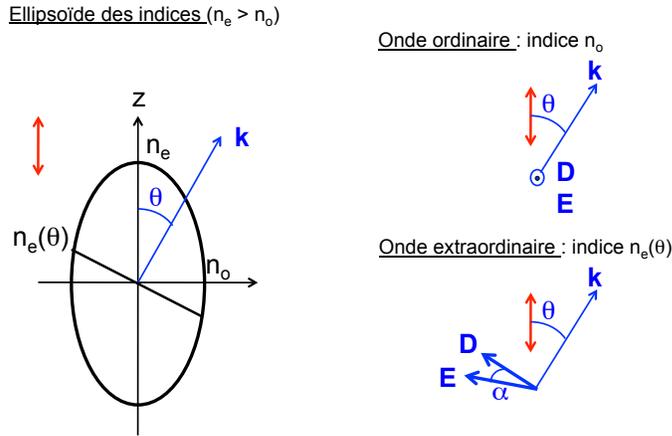


Figure 14.6: Ellipsoïde des indices pour un milieu uniaxe d'axe optique Oz . L'ellipsoïde est de révolution autour de l'axe (Oz). On utilise en général une double flèche pour indiquer la direction de l'axe optique. On déduit de la construction la structure des deux ondes ordinaire et extraordinaire.

par l'équation de l'ellipse de la Fig. 14.6 :

$$\frac{[n_e(\theta) \cos \theta]^2}{n_o^2} + \frac{[n_e(\theta) \sin \theta]^2}{n_e^2} = 1$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \tag{14.16}$$

14.4.2 Surface des indices et surface d'onde

La surface des indices et la surface d'onde dans le cas d'un milieu uniaxe d'axe optique Oz sont représentées sur la figure 14.7.

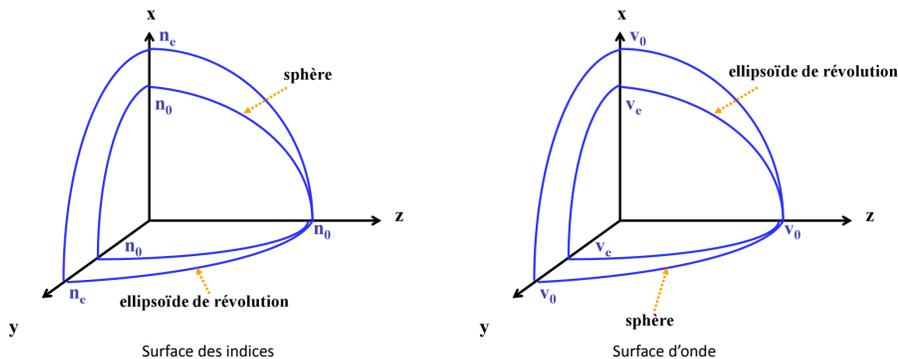


Figure 14.7: Représentation tridimensionnelle de la surface des indices et de la surface d'onde dans le cas d'un milieu uniaxe d'axe optique Oz . On ne représente que 1/8 de la figure.

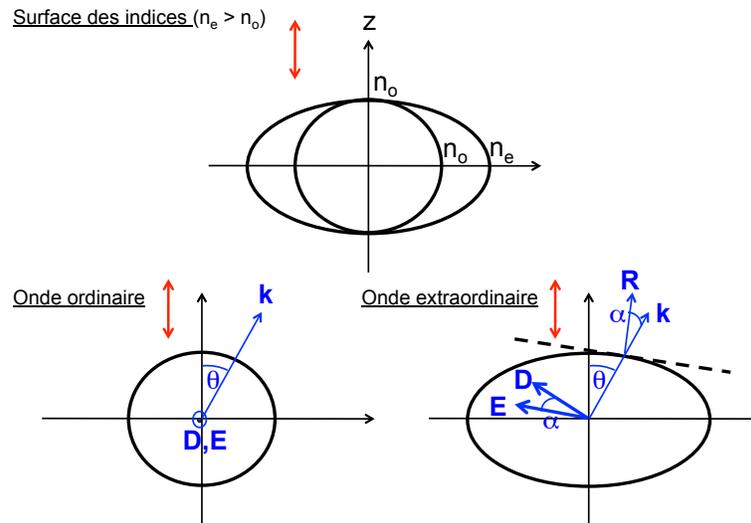


Figure 14.8: Surface des indices pour un milieu uniaxe d'axe optique Oz , tracée dans un plan contenant le vecteur d'onde \mathbf{k} et l'axe optique.

On utilise également souvent une représentation en coupe, comme sur la Fig. 14.8. De même que la normale à l'ellipsoïde des indices indique la direction de \mathbf{E} , la normale à la surface des indices donne la direction du vecteur de Poynting \mathbf{R} .

Références

- [1] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), 7ème édition, chapitre 14.
- [2] L. Landau and F. Lifchitz, *Electrodynamique des Milieux Continus* (Editions Mir, Moscou, 1969), chapitre 11. Existe aussi en version anglaise plus récente : L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon Press, Oxford, 1984).

Chapitre 15

Anisotropie : applications

Objectifs

- Présenter les conséquences pratiques découlant des propriétés générales des ondes optiques dans les milieux anisotropes.
- Montrer des exemples de comportements et d'applications résultant d'anisotropies intrinsèques des matériaux, et d'anisotropies induites par un champ externe (par exemple un champ magnétique, un champ électrique ou un champ de contraintes mécaniques).

15.1 Réfraction et biréfringence

La transmission d'une onde plane à une interface entre un milieu isotrope et un milieu anisotrope donne lieu à un effet surprenant : la présence de deux ondes transmises se propageant dans des directions différentes. On parle de "double réfraction", ou encore de "biréfringence". Nous avons vu au chapitre précédent que par direction de propagation, il faut préciser si l'on entend propagation de la phase (vecteur d'onde \mathbf{k}) ou de l'énergie (vecteur de Poynting \mathbf{R}), car \mathbf{k} et \mathbf{R} ne sont pas nécessairement colinéaires. Il existe deux constructions géométriques permettant de déterminer la direction des vecteurs d'ondes et des rayons réfractés.

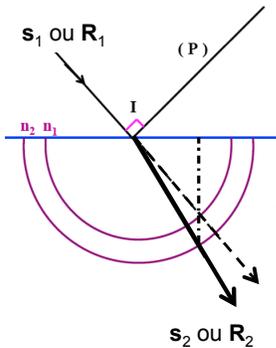
15.1.1 Construction de Descartes

La construction de Descartes utilise le fait que lorsqu'une onde plane monochromatique est incidente sur une interface plane séparant deux milieux homogènes, la projection du vecteur d'onde dans le plan de l'interface (composante tangentielle) est conservée.

Pour construire la direction du vecteur d'onde transmis (réfracté), on procède en deux étapes. On construit la projection du vecteur d'onde sur l'interface à partir de la direction de l'onde incidente et de la surface des indices du milieu d'incidence (milieu 1). Ensuite, à partir de cette projection et de la surface des indices du milieu de transmission (milieu 2), on construit la direction du vecteur d'onde transmis. Cette construction est illustrée sur la Fig. 15.1 dans le cas d'une interface séparant deux milieux isotropes (figure de gauche), et séparant un milieu

isotrope d'un milieu anisotrope (figure de droite). Dans le cas de deux milieux isotropes, on retrouve la direction de réfraction décrite par les lois de Snell-Descartes. Dans le cas du milieu anisotrope, du fait des deux surfaces des indices différentes, on obtient deux vecteurs d'ondes non colinéaires qui correspondent à deux ondes réfractées.

Milieu isotrope



Milieu anisotrope uniaxe : direction des vecteurs \mathbf{k} réfractés

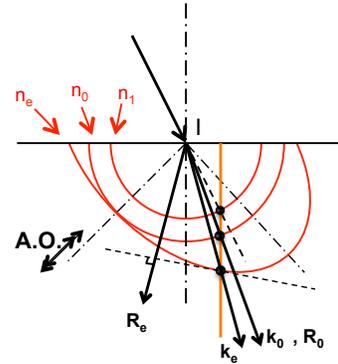


Figure 15.1: Principe de la construction de Descartes. Gauche : milieux incident et émergent isotropes. Droite : milieu incident isotrope et milieu émergent anisotrope uniaxe (l'axe optique est indiqué par la double flèche).

De plus, en traçant le plan tangent à la surface des indices au point d'intersection avec la direction du vecteur d'onde, on peut déterminer la direction du vecteur de Poynting \mathbf{R} . Celle-ci est donnée par la normale au plan tangent. On peut donc déterminer également la direction du vecteur de Poynting à partir de la construction de Descartes. Pour l'onde ordinaire, les directions de \mathbf{k} et \mathbf{R} coïncident (d'où l'appellation "ordinaire"). Pour l'onde extraordinaire, les directions de \mathbf{k} et \mathbf{R} sont différentes.

15.1.2 Construction de Huygens

La construction d'Huygens utilise la vision d'Huygens d'un plan d'onde transmis qui se construit comme étant l'enveloppe des ondes secondaires générées en tout point de l'interface par le plan d'onde incident. Les ondes secondaires épousent la forme de la surface d'onde (ou surface des vitesses) dans le milieu de propagation. Le plan d'onde est ainsi toujours tangent à la surface d'onde.

Pour construire la direction du rayon transmis, on procède également en deux étapes. A partir de la surface d'onde du milieu 1 et de la direction du rayon incident, on trace la tangente à la surface d'onde au point d'intersection avec le rayon incident (la tangente indique la direction du plan d'onde incident). Cette tangente coupe l'interface en un point (noté J sur la Fig. 15.2). Cette intersection est le point commun aux plans d'onde incident et transmis (on peut l'imaginer se déplaçant le long de l'interface au cours de la propagation des deux ondes). Depuis ce point, on trace ensuite la tangente à la surface d'onde du milieu 2, qui indique la direction du plan

d'onde transmis. Le point de tangence permet de déduire la direction du rayon transmis dans le milieu 2. Cette construction est illustrée sur la Fig. 15.2 dans le cas d'une interface séparant deux milieux isotropes (figure de gauche), et séparant un milieu isotrope d'un milieu anisotrope (figure de droite). Dans le cas de deux milieux isotropes, on retrouve la loi de Snell-Descartes habituelle. Dans le cas du milieu anisotrope, on observe les deux rayons réfractés.

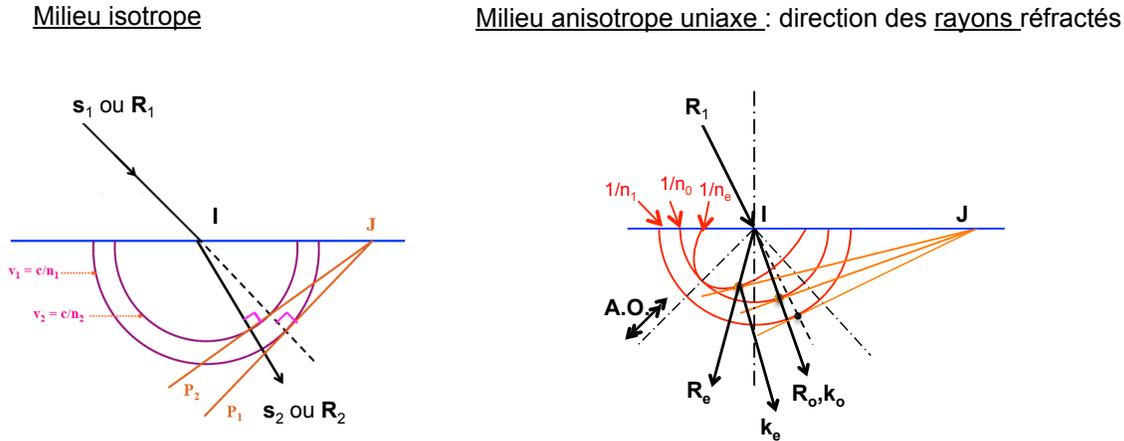


Figure 15.2: Principe de la construction de Huygens pour la même interface que sur la Fig. 15.1.

On peut également déterminer la direction du vecteur d'onde à partir de la construction d'Huygens. Cette direction est celle de la normale à la surface d'onde au point de tangence. On remarque que les directions de \mathbf{k} et \mathbf{R} sur la Fig. 15.2 sont bien identiques à celles de la Fig. 15.1 obtenues par la construction de Descartes.

15.1.3 Double réfraction à travers une lame à faces parallèles

Dans le cas d'une lame à faces parallèles formée d'un matériau anisotrope uniaxe, la Fig. 15.3 présente la construction de Descartes indiquant les directions des vecteurs d'onde. On voit émerger deux "rayons" différents. Une image en transmission serait donc dédoublée (comme on peut l'observer à travers un cristal de spath de quelques centimètres). De plus, les deux ondes ordinaire et extraordinaire ont des polarisations perpendiculaires. La double réfraction permet donc à partir d'un faisceau incident de produire deux faisceaux séparés spatialement, et ayant en plus des polarisations linéaires perpendiculaires. Cette propriété permet de concevoir des polariseurs.

15.1.4 Application de la double réfraction : polariseurs

Puisque par double réfraction on sépare deux rayons polarisés linéairement, en supprimant l'un des deux rayons on réalise un polariseur linéaire. La direction de la polarisation est celle du champ électrique \mathbf{E} émergeant dans l'air à la sortie du polariseur.

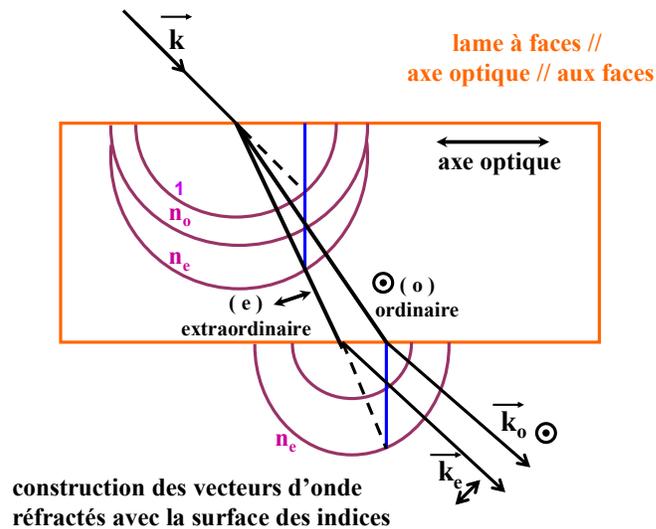


Figure 15.3: Construction de Descartes pour la transmission à travers une lame à faces parallèles dont l'axe optique est parallèle aux faces. Les différences d'indices ordinaire et extraordinaire ont été exagérées pour la visibilité du tracé.

Les caractéristiques essentielles que l'on demande à un polariseur sont :

- Une bonne qualité de polarisation $Q = \phi_{\parallel} / \phi_{\perp}$ définie comme le rapport des flux obtenus avec les polariseurs parallèles et croisés. Q est souvent limitée par la diffusion résiduelle et les réflexions parasites.
- Une bonne transparence du matériau.
- Un grand champ angulaire (sauf pour l'utilisation avec des lasers directionnels).
- Un grand domaine spectral accessible.
- Une réalisation simple et pratique.
- Un coût adapté aux exigences de l'application visée.

Afin de réaliser un polariseur, on utilise des prismes. Les dispositifs les plus courants sont représentés sur la Fig. 15.4 :

- Prisme de Nicol (Spath)
Il est constitué de deux parties d'un rhomboèdre de spath scié et collé avec du baume du Canada (colle) d'indice moins élevé. Le rayon ordinaire frappe l'interface cristal/colle avec une incidence au-delà de l'angle critique, il est totalement réfléchi. Le décalage des faisceaux peut poser un problème si on tourne le polariseur. Le champ angulaire est assez faible.

- Prisme de Glazebrook

Il n'y a pas de décalage, et ce polariseur offre un grand champ. $Q \simeq 10^5 - 10^6$. La transparence de la colle dans l'UV peut poser des problèmes.

- Prisme de Rochon et Wollaston.

Il persiste une faible séparation mais on n'utilise pas de colle. Ces prismes peuvent être utilisés avec des lasers de puissance, et même dans les cavités des lasers eux-mêmes.

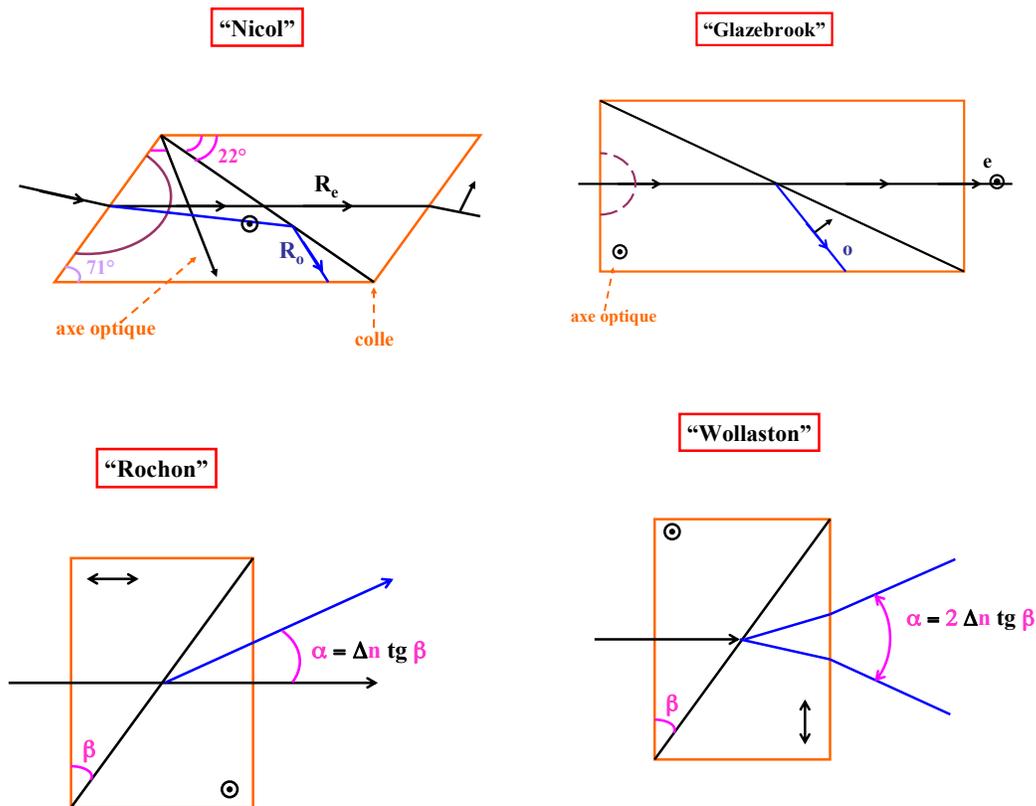


Figure 15.4: Schémas de principe de dispositifs polarisants utilisant des prismes formés de matériaux anisotropes.

Il existe d'autres types de polariseurs, qui utilisent des principes différents. Citons en particulier :

- Les cristaux dichroïques dits "polaroid". Ils sont formés d'une couche mince de microcristaux orientés sous champ électrique et pris dans la gélatine. Ils fonctionnent en absorbant presque complètement une polarisation linéaire donnée.
- Les polariseurs à grille utilisés dans l'infrarouge. L'absorption est maximale lorsque le champ électrique est parallèle aux tiges de la grille.
- Les polariseurs à pile de lames fonctionnant à l'incidence de Brewster.

15.2 Lames minces et interférences en lumière polarisée

Un exemple important est celui des lames à faces parallèles taillées dans un cristal anisotrope uniaxe. Ces lames permettent de façonner à volonté l'état de polarisation de la lumière. De plus, lorsqu'elles sont placées entre deux polariseurs (le premier étant dit "polariseur" et le second "analyseur"), on observe des interférences à deux ondes analogues à celles produites par des interféromètres à division de train d'onde (comme ceux présentés au chapitre 1).

15.2.1 Lame mince biréfringente

Une lame est dite "mince" lorsqu'on peut négliger le dédoublement et le décalage spatial du faisceau qui la traverse. C'est le déphasage induit par la traversée de la lame qui est utilisé, car il n'est pas le même pour les deux ondes transmises. Le cas particulier important que nous examinons est celui de l'incidence normale, comme indiqué sur la Fig. 15.5.

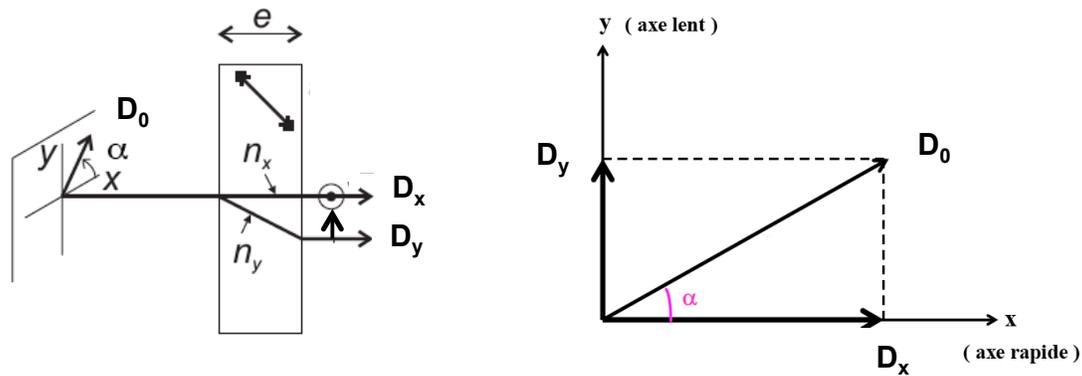


Figure 15.5: Transmission à travers une lame mince éclairée en incidence normale. Les directions x et y correspondent aux lignes neutres, qui sont les deux directions selon lesquelles le vecteur \mathbf{D} peut se propager sans modification. Les deux ondes transmises ont été décalées par souci de lisibilité, mais dans l'approximation de lame mince ce décalage est négligeable.

Les deux directions perpendiculaires \mathbf{D}_x et \mathbf{D}_y du vecteur \mathbf{D} qui se propagent sans modification sont appelées *lignes neutres*. Pour ces deux directions, on a deux indices n_x et n_y différents. Le déphasage entre les deux composantes \mathbf{D}_x et \mathbf{D}_y après la traversée de la lame est :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e$$

où e est l'épaisseur de la lame. En incidence normale, l'action de la lame sur la lumière incidente est entièrement déterminée par ϕ et l'orientation des lignes neutres par rapport à la direction du champ incident (angle α sur la Fig. 15.5).

15.2.2 Action sur une polarisation linéaire

Pour une onde incidente polarisée linéairement, de champ électrique \mathbf{E}_0 et de déplacement électrique \mathbf{D}_0 sur la face d'entrée de la lame (les deux étant colinéaires dans l'air), les amplitudes complexes projetées sur les lignes neutres en sortie de la lame sont de la forme (en utilisant les notations de la Fig. 15.5) :

$$\begin{aligned} D_x &= D_0 \cos \alpha \\ D_y &= D_0 \sin \alpha \exp(i\phi) \end{aligned}$$

Cas particuliers

- $\phi = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$: lame d'onde.
La polarisation linéaire reste inchangée.
- $\phi = (2p + 1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$: lame demi-onde.
On obtient une polarisation linéaire symétrique par rapport aux lignes neutres. Cette lame est utile lorsqu'on souhaite faire tourner une polarisation rectiligne sans toucher aux autres éléments d'un montage.
- $\phi = (2p + 1)\pi/2$, $p \in \mathbb{Z}$: lame quart d'onde.
On obtient en sortie une polarisation elliptique. Les axes de l'ellipse sont les lignes neutres de la lame. Notons que le sens de parcours de l'ellipse dépend de la position respective de la polarisation incidente avec les axes lent et rapide de la lame (c'est-à-dire des signes de ϕ et de α). Pour une polarisation incidente à 45° ou 135° (orientée selon l'une des bissectrices des lignes neutres), on obtient en sortie une polarisation circulaire.

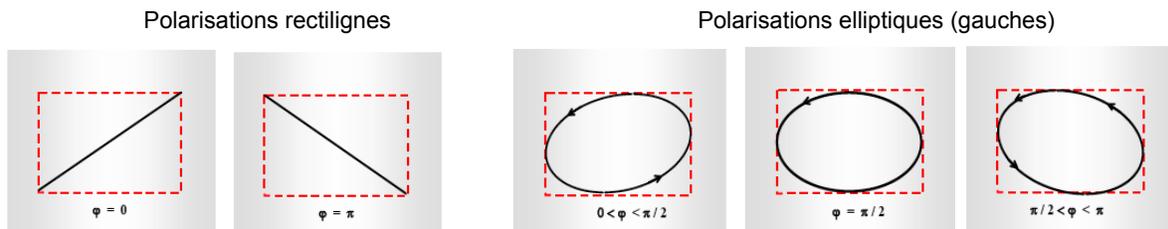


Figure 15.6: Représentation des états de polarisation en sortie d'une lame mince. Les cas représentés correspondent à des ellipses gauches. On obtient des ellipses droites pour $3\pi/2 < \phi < 2\pi$, $\phi = 3\pi/2$, $\pi < \phi < 3\pi/2$.

- $\alpha = 45^\circ$: l'état de polarisation elliptique en sortie peut se représenter en se plaçant dans le repère (OX, OY) défini par rapport à la direction du champ électrique incident (ceci revient à effectuer une rotation d'angle α).

On obtient :

$$D_X = \frac{D_x}{\sqrt{2}} + \frac{D_y}{\sqrt{2}} = D_0 \cos(\phi/2) \exp(i\phi/2)$$

$$D_Y = -\frac{D_x}{\sqrt{2}} + \frac{D_y}{\sqrt{2}} = iD_0 \sin(\phi/2) \exp(i\phi/2)$$

On a donc dans ce cas précis une ellipse dont les axes sont OX et OY , qui sont les bissectrices des axes neutres, et dont l'excentricité est $\tan(\phi/2)$.

Application

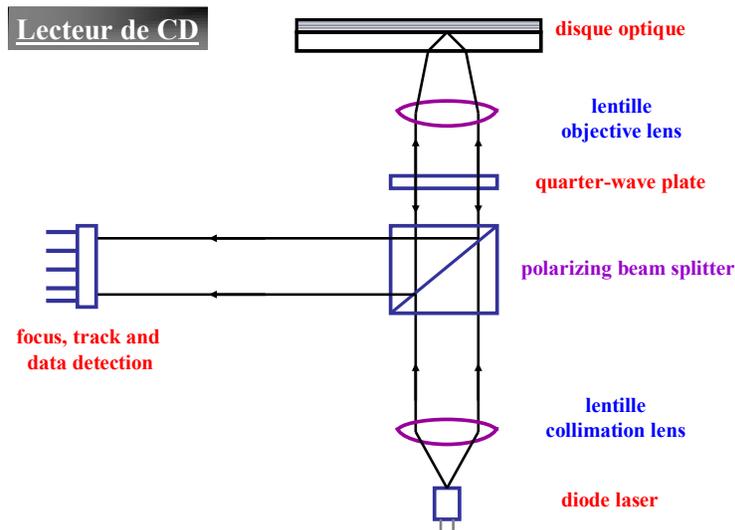


Figure 15.7: Dans un lecteur CD, la lame quart d'onde combinée au cube séparateur de polarisation permet de diriger le signal réfléchi vers le détecteur optique. Utilisée en double passage, la lame quart d'onde fait tourner la polarisation linéaire incidente. Associée à un polariseur, elle permet ainsi de réaliser un système anti-retour

15.2.3 Interférences à deux ondes en lumière polarisée

Les deux vibrations orthogonales déphasées en sortie de lame n'interfèrent pas entre elles. Pour avoir des interférences, il faut les projeter sur une direction commune. En plus d'un polariseur (P) utilisé en entrée, on place un analyseur (A) en sortie, comme indiqué sur la Fig. 15.8.

En notant I_0 l'intensité incidente, l'intensité en sortie après l'analyseur se met sous la forme

$$I(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta)[1 + C(\alpha, \beta) \cos \phi] \quad (15.1)$$

qui prend l'allure d'un interférogramme à deux ondes ayant une amplitude

$$A(\alpha, \beta) = I_0(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta)$$

et un contraste

$$C(\alpha, \beta) = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

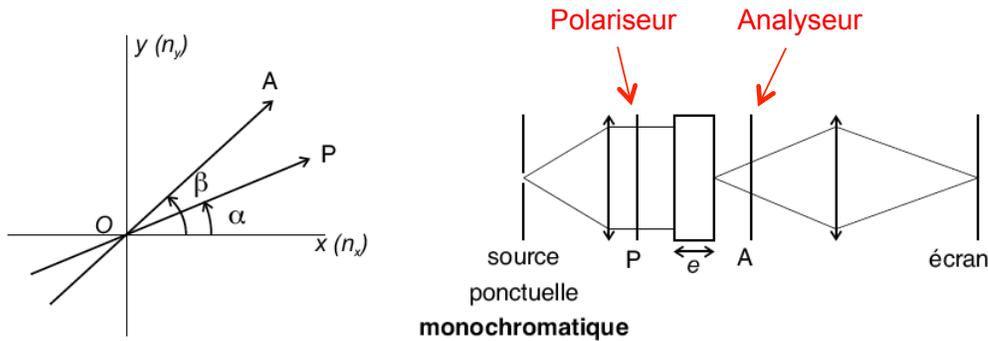


Figure 15.8: Schéma de principe d'un montage permettant de visualiser des interférences en lumière polarisée après traversée d'une lame mince. P : polariseur en entrée. A : polariseur (analyseur) en sortie.

Cas particuliers

- Si P ou A sont orientés le long d'une ligne neutre ($\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\alpha = \pi/2$ ou $\beta = \pi/2$) : le contraste s'annule.
- Si $\alpha - \beta = \pi/2 + p\pi$: configuration avec polariseur et analyseur croisés. On a $I(\alpha, \beta) = I_0 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\phi/2)$ et une intensité maximale $I = I_0 \sin^2(\phi/2)$ pour $\alpha = 45^\circ$.
En lumière monochromatique, si α est fixé et que l'épaisseur e de la lame et $\Delta n = n_y - n_x$ sont uniformes, on observe (sous éclairage collimaté) un champ uniformément éclairé. En lumière blanche, on observe l'extinction des longueurs d'onde telles que $\phi = 2p\pi$, c'est-à-dire telles que $\Delta n e = p\lambda$. Si p est faible (1 ou 2), l'échelle des teintes de Newton (centre noir) permet de remonter à la différence de marche. Si p est grand on a un blanc d'ordre supérieur (spectre cannelé).
- Si $\alpha = \beta = 45^\circ$: configuration avec polariseur et analyseur parallèles et à 45° des lignes neutres. Le contraste vaut 1 et on a une intensité maximale $I = I_0 \cos^2(\phi/2) = I_0/2(1 + \cos \phi)$. L'expression de l'intensité est similaire à celle obtenue avec un interféromètre à deux ondes classique (Michelson, fentes d'Young par exemple). Ici la séparation entre les deux ondes n'est pas spatiale, mais elle se fait au travers de deux polarisations orthogonales que l'on

recombine ensuite grâce à l'analyseur. Notons que la condition sur la cohérence temporelle est peu sévère car la différence de marche $\Delta n e \simeq \lambda$ reste faible.

Finalement, on peut remarquer que par analogie on peut construire une polarisation elliptique quelconque en utilisant par exemple un interféromètre de Michelson. Il suffit en principe de placer un polariseur dans chacun des bras et de déplacer l'un des miroirs.

15.2.4 Mesure des déphasages : compensateurs

Pour de faibles valeurs de $\Delta n e$, l'échelle des teintes de Newton permet la mesure de ϕ . On recoupe les résultats en prenant deux mesures entre polariseurs parallèles ou croisés (système de teintes à centre noir ou à centre blanc).

Dans le cas général on utilise une méthode de zéro en compensant l'effet de la lame à étudier par une autre biréfringence opposée et de lignes neutres parallèles.

Exemple : compensateur de Babinet

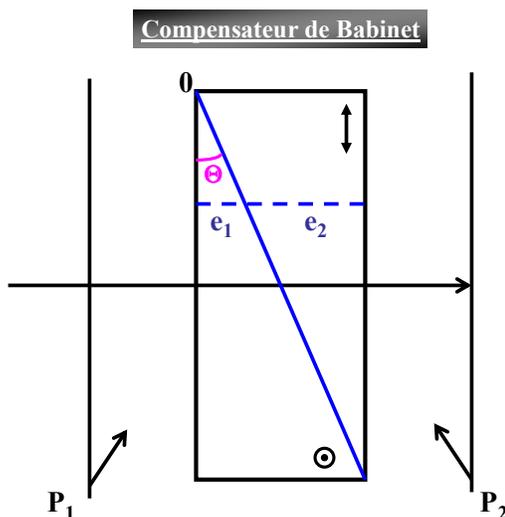


Figure 15.9: Schéma de principe du compensateur de Babinet.

C'est en fait un biprisme de Wollaston avec un angle θ généralement faible. On négligera donc les effets de double réfraction et la séparation angulaire des faisceaux (approximation de lame mince). Le déphasage s'écrit :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)(e_1 - e_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n(e_1 - e_2)$$

Utilisons d'abord un faisceau parallèle de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ , et des polariseurs croisés à 45° des lignes neutres du compensateur. On observe des franges noires, parallèles à l'arrête des prismes, localisées sur le compensateur avec un interfrange i .

Si x est la distance entre l'origine O et la ligne e_1, e_2 , on a $e_1 = x \tan \theta$ et $e_2 = (L - x) \tan \theta$, soit $e_1 - e_2 = (2x - L) \tan \theta$, L étant l'épaisseur de la lame. On passe de ϕ à $\phi + 2\pi$ si

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n (2x - L - 2i) \tan \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n (2x - L) \tan \theta$$

ce qui donne

$$i = \frac{\lambda}{2 \tan \theta \Delta n}$$

Avec la lumière monochromatique, la mesure du déphasage se fait à 2π près (une frange près). Si on utilise un faisceau parallèle de lumière blanche, on observe une frange noire au centre, les autres zones du champs étant colorées. On mesure donc le déplacement de cette frange noire en plaçant la lame inconnue avec ses axes parallèles à ceux du compensateur. On translate le biprisme pour ramener la frange noire au centre. La mesure précise de cette translation donne la valeur de la biréfringence Δn , l'étalonnage se faisant à partir de l'interfrange.

15.3 Dichroïsmes et pouvoir rotatoire

Jusqu'à présent, comme seule manifestation de l'anisotropie, nous avons considéré la biréfringence linéaire des matériaux anisotropes. Il existe d'autres manifestations de l'anisotropie comme la biréfringence circulaire et le pouvoir rotatoire, ou les dichroïsmes circulaires et linéaires qui sont les phénomènes associés aux parties imaginaires des indices (absorption), alors que les biréfringences sont liées aux parties réelles (changement de vitesse de phase).

15.3.1 Biréfringence circulaire

Dans ce cas les deux vibrations privilégiées, que le milieu peut transmettre sans altération, sont deux vibrations de polarisation circulaire gauche et droite. On définit pour ces deux polarisations circulaires propres les deux indices n_G et n_D . La biréfringence circulaire est un effet très faible : $\Delta n \simeq 7.10^{-6}$ dans le cas du quartz, soit une déviation de 23 secondes d'arc pour un prisme de 60° . Pour la mettre en évidence, Fresnel a utilisé une cascade de prismes droits et gauches dont les bases et les sommets sont alternés, comme indiqué sur la Fig. 15.10.

Cette observation directe reste délicate, mais la conséquence la plus visible de la biréfringence circulaire est le *pouvoir rotatoire*, c'est-à-dire l'aptitude du milieu à faire tourner une polarisation linéaire, comme représenté schématiquement sur la Fig. 15.11.

La polarisation linéaire incidente tourne d'un angle θ tel que $\theta = \rho e$, où e est l'épaisseur du milieu et ρ est le pouvoir rotatoire défini comme

$$\rho = \frac{\pi(n_G - n_D)}{\lambda}$$

Le pouvoir rotatoire est indépendant de la polarisation initiale, et du sens de propagation. On dit des matériaux présentant une biréfringence circulaire qu'ils sont *optiquement actifs*. Pour cela, leur structure ne doit pas posséder de centre de symétrie. Ceci peut être lié à un arrangement particulier d'une structure cristalline (exemple quartz "droit" et son image "gauche" dans un miroir), ou à une propriété des molécules elles-mêmes (exemple deux énantiomères).

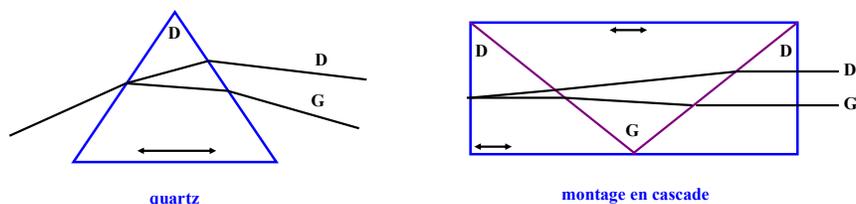


Figure 15.10: Principe de l'observation de la biréfringence circulaire.

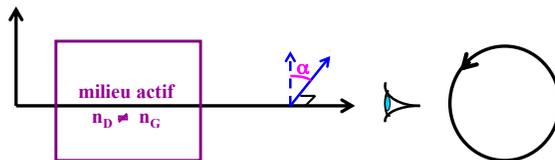


Figure 15.11: Principe de l'observation du pouvoir rotatoire d'un matériau possédant une biréfringence circulaire.

Dichroïsmes

Nous avons jusqu'à présent considéré une bande spectrale de transparence des matériaux (indice n supposé réel). Si on se trouve dans une région d'absorption (l'indice optique est complexe), on observera une variation du coefficient d'absorption (partie imaginaire de l'indice) pour deux polarisations perpendiculaires. On parle alors de *dichroïsme*.

On distingue le dichroïsme linéaire qui dépend de la différence $\text{Im}(n_o) - \text{Im}(n_e)$ (par exemple celui utilisé dans les films polarisants de type polaroid) du dichroïsme circulaire qui dépend de la différence $\text{Im}(n_G) - \text{Im}(n_D)$ (qui est observé dans beaucoup de molécules biologiques). Dans ce dernier cas des polarisations circulaires droite et gauche verront des niveaux d'absorption différents.

15.4 Anisotropies induites et modulations de la lumière

Nous avons jusqu'à présent uniquement considéré des anisotropies "naturelles" liées aux propriétés de symétrie de la structure des molécules ou des cristaux. D'autres anisotropies peuvent être induites par des champs extérieurs (champ électrique ou magnétique, contraintes uniaxiales...). On observe alors des effets de biréfringence ou de dichroïsme. Ces effets induits, surtout s'ils sont rapides, sont à la base de techniques de modulation de la lumière qui ont permis le développement de la transmission optique de l'information.

15.4.1 Effets magnéto-optiques

Lorsqu'on soumet un milieu transparent (eau, verre...) à un champ magnétique \mathbf{B} statique externe, on observe une rotation de la direction de polarisation de la lumière transmise, mise en évidence initialement par Faraday en 1846. Cette rotation de polarisation, appelée "effet Faraday", présente les propriétés suivantes :

- Elle ne dépend pas du sens de propagation. A la différence du pouvoir rotatoire naturel dont nous avons parlé précédemment, elle ne s'annule pas après réflexion (voir Fig. 15.12).
- Le signe de la rotation s'inverse avec \mathbf{B} .
- Pour un système diamagnétique, l'effet suit instantanément \mathbf{B} et le sens de la rotation est celui du courant magnétisant (ce n'est pas le cas des systèmes paramagnétiques à basse température ou ferromagnétiques).
- L'amplitude de la rotation de polarisation θ suit la loi de Verdet $\theta = C B_p L$, où C est la constante de Verdet, L la longueur de l'échantillon et B_p la projection du champ magnétique sur la direction de propagation du faisceau. Ordre de grandeur : pour $B_p = 1$ T (qui est déjà un champ magnétique intense) et $L = 1$ dcm, la rotation est $\theta = 2^\circ 10'$ dans l'eau, $\theta = 2^\circ 46'$ dans le quartz. On a $\theta = 13^\circ$ à travers $1\mu\text{m}$ de Fe à saturation magnétique (mais il y a très peu de lumière qui sort de l'échantillon).

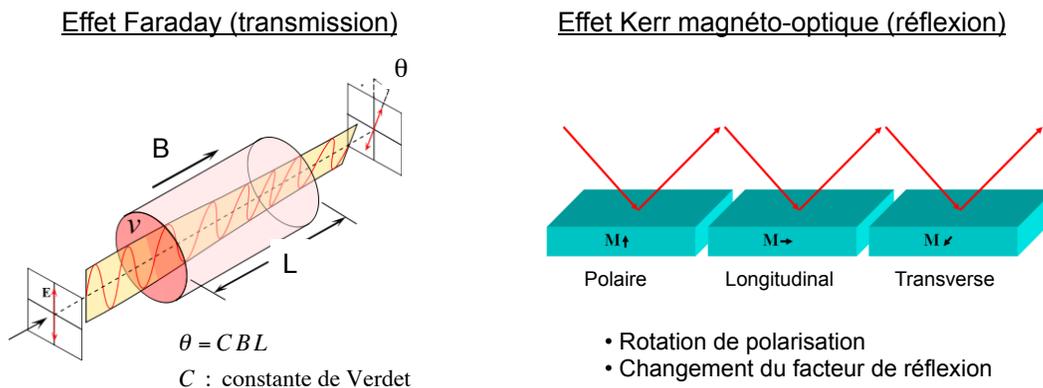


Figure 15.12: Illustration de l'effet magnéto-optique en transmission (effet Faraday) et en réflexion (effet Kerr magnéto-optique).

Un effet magnéto-optique existe également en réflexion (on parle alors d'"effet Kerr" magnéto-optique), comme indiqué sur la Fig. 15.12. Selon l'orientation du champ magnétique externe par rapport au plan d'incidence (géométrie polaire, longitudinale ou transverse), on observe un changement d'état de polarisation (il y a à la fois elliptisation et rotation du grand axe de l'ellipse par rapport à la polarisation linéaire initiale) ou un changement du facteur de réflexion en polarisation TM (géométrie transverse). On peut observer ces effets sur des matériaux opaques,

et on utilise souvent des matériaux ferromagnétiques (Co, Ni, Fe) sous un champ externe suffisant pour être à saturation. Pour Fe les angles sont $\simeq 1/200$ degré à saturation. En utilisant des grenats comme le YIG (Yttrium Iron Garnet, grenat mixte d'Yttrium et de fer) les rotations atteignent plusieurs degrés. Les effets étant faibles, on peut réaliser des hétérostructures couplant ces matériaux ferroélectriques avec des résonances optiques qui induisent des champs électriques locaux intenses, ce qui amplifie la réponse magnéto-optique.

Sous l'application d'un champ magnétique externe, c'est le tenseur diélectrique qui est modifié. Il prend alors la forme générale

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_r \end{pmatrix} + iQ\epsilon_r \begin{pmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{pmatrix}$$

Le premier terme du membre de droite correspond à la réponse diélectrique en l'absence de champ externe (on a supposé le milieu initialement isotrope). Le second terme décrit le réponse magnéto-optique, \mathbf{m} étant un vecteur unitaire dans la direction de l'aimantation dans le matériau (induite par le champ externe) et Q le coefficient magnéto-optique du matériau. Ce terme est un tenseur antisymétrique. Cette forme du tenseur diélectrique permet de modéliser les effets magnéto-optiques

Parmi les applications, citons le stockage de l'information par écriture et lecture optique (utilisant l'effet Kerr magnéto-optique), la mesure des courants électriques dans les zones de très haute tension avec des fibres optiques (dites "à maintien de polarisation"), et la conception d'isolateurs optiques pour éviter par exemple les retours de lumières dans les lasers (ces systèmes utilisent le comportement non réciproque engendré par la partie antisymétrique du tenseur diélectrique).

15.4.2 Effet Kerr électro-optique

La plupart des liquides deviennent biréfringents lorsqu'on les place dans un champ électrique statique \mathbf{E} . Cet effet électro-optique a été découvert par Kerr en 1875. Compte tenu de la symétrie de l'expérience, la direction du champ électrique qui brise l'isotropie initiale du liquide est l'axe optique.

L'origine physique de l'effet est lié à l'anisotropie microscopique qui règne à l'échelle moléculaire : les molécules (eau, sulfure de carbone, nitrobenzène...) qui possèdent un moment dipolaire électrique permanent \mathbf{p} vont voir celui-ci s'aligner avec \mathbf{E} . Pour aligner toutes les molécules et vaincre l'agitation thermique, il faut avoir $|\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}| > k_B T$, avec $|\mathbf{p}| \simeq 10^{-26}$ en unité SI. Cela conduit à des champs supérieurs à 10^5 V/m (soit quelques milliers de volts pour des électrodes distantes d'un cm).

Par symétrie, l'indice qui affecte la direction parallèle (n_e) ou perpendiculaire (n_o) à \mathbf{E} ne dépend pas du sens du champ donc, à l'ordre le plus bas, l'effet doit être en E^2 . On trouve :

$$\Delta n = n_e - n_o = B \lambda E^2$$

où B est la constante de Kerr ($5,1 \cdot 10^{-14}$ pour l'eau, $2,5 \cdot 10^{-12}$ pour le nitrobenzène $C_6H_5NO_2$ et $3,56 \cdot 10^{-14}$ pour le sulfure de carbone CS_2 en unités SI). La différence de marche $\delta = \Delta n L$ vaut $\simeq \lambda/4$ pour $L = 0,1$ m de nitrobenzène et $E = 10^6$ V/m (soit 2000 V pour une distance interélectrodes de 2 mm suffisante pour laisser passer un faisceau laser).

Remarques sur l'effet Kerr

1) Pour moduler de la lumière en “tout ou rien”, on peut placer une cellule de Kerr (formée de deux électrodes et d'un liquide polaire orientable sous champ électrique) entre deux polariseurs parallèles (ou croisés) à 45° des axes de la biréfringence induite (voir Fig. 15.13). En appliquant une tension capable de créer une différence de marche de $\lambda/2$ (demi-onde), on fait basculer la polarisation de 90° par rapport à sa direction initiale et on obtient un minimum (ou un maximum) de lumière transmise. Si cette modulation sert par exemple à transmettre de l'information il faut qu'elle puisse être rapide. Les temps de réorientation de petites molécules sont de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-10} s selon la viscosité du liquide.

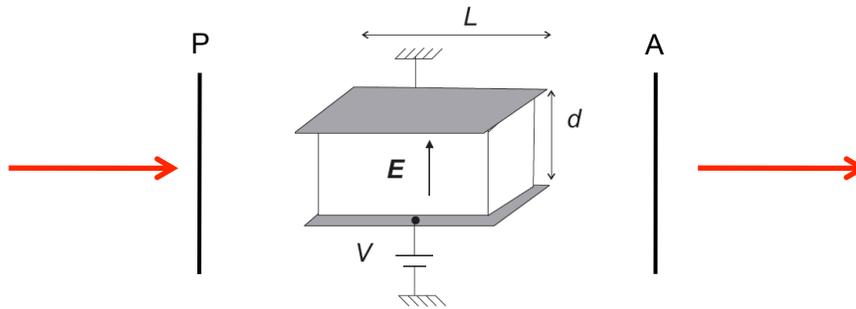


Figure 15.13: Schéma de principe d'un modulateur de lumière utilisant une cellule à effet Kerr (ou à effet Pockels).

2) Effet Kerr “optique”

On sait qu'avec des lasers impulsionnels on peut obtenir des densités de puissance (W/m^3) très élevées, et donc des champs électriques très importants ($\simeq 10^{10}$ V/m). Ces champs peuvent induire et orienter un dipôle électrique dans un milieu moléculaire. Les effets correspondants jouent un rôle important dans un certain nombre de phénomènes non linéaires, comme la bistabilité optique, l'autofocalisation des faisceaux intenses, les “portes optiques” rapides, etc.

3) Les cristaux liquides

Ces molécules de forme allongée possèdent un moment dipolaire permanent et elles peuvent être orientées par application d'un champ électrique. Il existe une grande diversité de cristaux liquides et de structures que l'on peut créer. Limitons nous à un exemple classique. On arrive, en traçant des sillons sur une plaque de verre, à aligner les molécules (brossage) parallèlement à la surface et aux sillons. Le système possède alors un axe optique dans cette dernière direction. L'application d'un champ perpendiculaire à la surface va orienter les molécules (et donc l'axe optique) perpendiculairement à la surface. Avec un polariseur à 45° et un miroir, on réalise avec des électrodes transparentes en ITO (Indium tin oxyde, oxyde d'indium et d'étain) un système d'affichage (utilisé par exemple dans les montres). Remarquons que les tensions appliquées sont de l'ordre du volt pour quelques micromètres d'épaisseur, soit des champs de l'ordre de 10^5 V/m.

15.4.3 Effet Pockels (ou électro-optique linéaire)

L'effet électro-optique linéaire, mis en évidence par Pockels en 1893, est le changement des indices ordinaire et extraordinaire d'un milieu anisotrope sous l'effet d'un champ électrique statique. Cet effet n'existe que pour des cristaux non centrosymétriques. Des cellules à effet Pockels, similaires aux cellules à effet Kerr, permettent de moduler la lumière. Elles fonctionnent à plus basse tension, utilisent des cristaux solides plutôt que des liquides polarisables, et sont linéaires vis-à-vis du champ électrique externe appliqué.

Pour modéliser l'effet Pockels, il faut chercher comment change l'ellipsoïde des indices lorsque le champ électrique externe est appliqué, et donc comment changent les quantités $1/n_i^2$, où les n_i sont les indices principaux. Dans la configuration longitudinale, le champ électrique appliqué est parallèle à la direction de propagation du faisceau lumineux (on utilise des électrodes transparentes), le cristal étant orienté de telle sorte que son axe optique en l'absence de champ externe soit également dans la même direction. Dans ces conditions, le déphasage subit à la traversée de la cellule est de la forme

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{n_o^3 r_{63}}{\lambda} V$$

où r_{63} est la constante électro-optique (m/V)¹ et n_o est l'indice ordinaire en l'absence de champ. La tension permettant un fonctionnement demi-onde ($\Delta\phi = \pi$) est

$$V_{1/2} = \frac{\lambda}{2n_o^3 r_{63}}$$

Par exemple pour KDP (Potassium Dihydrogène Phosphate), on a $r_{63} = 10,6 \cdot 10^{-12}$ m/V, $n_o = 1,51$ ce qui donne $V_{1/2} \simeq 3000$ V à $\lambda = 500$ nm.

15.4.4 Biréfringence par déformation

Un milieu isotrope qui subit une contrainte mécanique uniaxiale devient anisotrope (uniaxe) avec la direction de la contrainte comme axe optique (par symétrie). On parle d'effet photoélastique. La biréfringence $\Delta n = n_e - n_o$ est alors proportionnel $F/S = F/(eL)$ où F est la force appliquée et S la section du matériau. Le déphasage créé à la traversée d'une épaisseur e du matériau est donc

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n e = C \frac{2\pi}{\lambda} \frac{F}{L}$$

où C est une constante. Il est donc indépendant de l'épaisseur traversée. Avec du verre, une force $F = 10^3$ N et $L \simeq 1$ cm, on obtient une différence de marche de $\lambda/4$ dans le visible.

Si le champ de contraintes n'est pas uniforme, à partir de l'orientation des lignes neutres locales et des valeurs des biréfringences locales, on peut remonter à la distribution des contraintes dans une structure complexe, à condition de disposer d'un matériau modèle transparent (il existe en particulier du plexiglas qui possède un fort coefficient de photoélasticité et qui se prête bien à la fabrication de maquettes). Cette méthode s'appelle la photoélasticimétrie. Un exemple d'image obtenue est présenté Fig. 15.14.

¹La réponse au champ électrique du matériau anisotrope est décrite par un tenseur r_{ij} , dit tenseur électro-optique. Seule la composante r_{63} intervient dans la description de la configuration longitudinale.

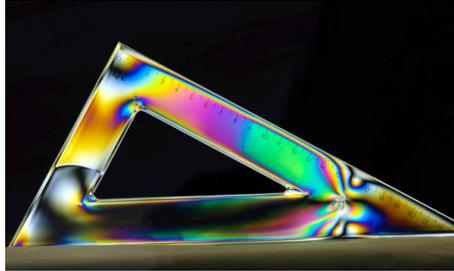


Figure 15.14: Visualisation du champ de contrainte par effet photoélastique. Entre polariseur et analyseur, on observe les interférences en lumière polarisée créées par l'anisotropie induite.

Références

- [1] G. Bruhat, *Cours de Physique Générale - Optique* (Masson, Paris, 1992)
- [2] S. Huard, *Polarisation de la Lumière* (Masson, Paris, 1994)
- [3] E. Hecht, *Optique* (Pearson Education France, Paris, 2005)

Chapitre 16

Introduction à l'optique non linéaire

Objectifs

- Discuter l'origine physique des effets non linéaires.
- Introduire la génération d'harmoniques et la condition d'accord de phase.
- Présenter une application : l'amplification paramétrique

16.1 Origine des effets non linéaires

La polarisation d'un milieu diélectrique sous l'action d'un champ électromagnétique est due au déplacement des électrons liés aux atomes. Le potentiel $V(r)$ vu par l'électron dans l'atome a la forme typique représentée sur la figure 16.1.

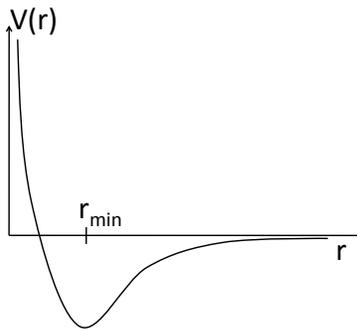


Figure 16.1: Allure du potentiel vu par un électron lié à un atome.

Au voisinage du minimum, le potentiel est parabolique, ce qui conduit à une force de rappel élastique. On peut utiliser le modèle de l'électron élastiquement lié pour déterminer la densité de polarisation et la réponse optique du milieu. On obtient une relation du type $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}$, où $\chi(\omega)$ est la susceptibilité linéaire du milieu. La constante diélectrique est $\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ et l'indice optique est $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$.

Lorsque l'électron est soumis à un champ électrique intense, il peut sonder une partie du potentiel qui n'est plus parabolique. L'électron est donc soumis à un potentiel anharmonique. Cette situation apparaît lorsque le champ appliqué devient non négligeable devant le champ atomique interne.

Ordre de grandeur :

Le champ électrique atomique interne vu par l'électron est $E_{at} \simeq e^2/(4\pi\epsilon_0 a^2)$ où a est le rayon atomique. Avec $a = 10^{-10}$ m, on obtient $E_{at} \simeq 10^{11}$ V.m⁻¹. Ce champ est largement supérieur à celui qu'il est possible de créer avec une source classique. Avec un laser impulsionnel de puissance crête 1 MW, focalisé sur une tache de 10×10 μm², on a une intensité $I \simeq 10^{16}$ W.m⁻². En utilisant $I = (\epsilon_0 c/2)|E_{\text{laser}}|^2$, on obtient $E_{\text{laser}} \simeq 3.10^9$ V.m⁻¹, qui est suffisant pour générer des réponses non linéaires. Le domaine de l'optique non linéaire a d'ailleurs débuté avec l'apparition du laser au début des années 1960 [1].

16.2 Susceptibilité linéaire et non linéaire

16.2.1 Définition

Lorsqu'une réponse non linéaire existe (sous l'action d'un champ extérieur suffisamment intense), on écrit la densité de polarisation sous la forme :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

qui est la forme général du développement de \mathbf{P} en puissances de \mathbf{E} , dans le cas d'un milieu anisotrope. La susceptibilité linéaire χ , les susceptibilités non linéaire d'ordre 2, notée $\chi^{(2)}$, d'ordre 3, notée $\chi^{(3)}$, etc, sont des tenseurs. Dans l'expression ci-dessus, on a utilisé des notations compactes pour les produits tensoriels. De manière explicite, on écrit la composante i de la polarisation sous la forme, avec $i, j, k \in (x, y, z)$:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots \quad (16.1)$$

Lorsque le champ électrique oscille à une fréquence ω , le termes d'ordre 2 donnera une réponse en polarisation à ω et à 2ω , et donc des champs rayonnés à ω et à 2ω . On parle de *génération d'harmoniques*. Si l'on excite avec deux champs de fréquences différentes ω et ω' , on aura des champs rayonnés à ω , ω' , 2ω , $2\omega'$, mais également à $\omega \pm \omega'$. On peut donc réaliser des additions et des soustractions de fréquences.

16.2.2 Susceptibilité linéaire : modèle de l'électron élastiquement lié

Avant de calculer la susceptibilité non linéaire d'ordre 2 d'un matériau, nous allons établir l'expression de la susceptibilité linéaire dans le cas d'un modèle simple. Afin de calculer la polarisation d'un milieu sous l'action du champ électrique, on utilise la dynamique classique. On étudie la réponse dynamique des électrons liés à un atome et soumis à un potentiel de la

forme de celui représenté sur la Fig. 16.1. En raisonnant en 1D avec une seule variable de position $x(t)$, et dans le cas de l'approximation harmonique, le potentiel parabolique s'écrit :

$$V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

Ce potentiel correspond à une force de rappel élastique, d'où le nom de modèle de l'électron élastiquement lié. L'équation dynamique de l'électron s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{-eE}{m} \quad (16.2)$$

où l'on a noté $\nu = \alpha\omega_0^2/a$ dans le terme anharmonique. Le paramètre Γ décrit l'amortissement du moment dipolaire induit (par rayonnement et collisions), et ω_0 est la fréquence de résonance de la liaison de l'électron (dans une approche quantique, ω_0 serait la pulsation de Bohr de la transition électronique). Le champ exciteur de l'électron est monochromatique, et oscille à la fréquence ω . On l'écrit sous la forme :

$$E = \text{Re}[E_1 \exp(-i\omega t)]$$

On cherche une solution sous la forme $x_1(t) = \text{Re}[X_1 \exp(-i\omega t)]$. L'insertion de cette expression de x dans l'Eq. (16.2) entraîne

$$X_1 = \frac{-eE_1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

Le moment dipolaire induit de l'atome est $p = -ex$. A ce stade on peut introduire la polarisabilité atomique (classique) telle que $p = \alpha(\omega)\epsilon_0 E$, et qui s'écrit :

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (16.3)$$

La densité de polarisation est $P = N(-ex) = \epsilon_0 \chi(\omega) E$ avec N le nombre d'atomes par unité de volume dans le matériau (dans ce modèle simple, on suppose les atomes indépendants, ce qui est vrai pour un gaz). On en déduit l'expression de la susceptibilité linéaire :

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \quad (16.4)$$

Au passage, notons que de cette expression on peut déduire celle de la constante diélectrique $\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$, et de l'indice $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$. L'expression obtenue décrit correctement l'indice optique d'un gaz atomique au voisinage d'une fréquence de transition ω_0 . Nous verrons plus loin dans le cours comment effectuer le même calcul en théorie quantique. Le résultat garde la même forme, ce qui explique le succès historique du modèle de l'électron élastiquement lié.

16.2.3 Potentiel anharmonique. Susceptibilité non linéaire d'ordre 2

Lorsque le champ exciteur devient plus intense, l'électron devient sensible aux termes anharmoniques du potentiel. En prenant en compte la première correction anharmonique, le potentiel s'écrit :

$$V(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 + \alpha \frac{m\omega_0^2}{3a} x^3 \quad \text{avec} \quad \alpha \ll 1$$

Avec ce nouveau potentiel, l'équation dynamique de l'électron devient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + \nu x^2 = \frac{-eE}{m} \quad (16.5)$$

où l'on a noté $\nu = \alpha \omega_0^2/a$ dans le terme anharmonique. Le champ excitateur à la fréquence fondamentale ω est toujours de la forme $E = \text{Re}[E_1 \exp(-i\omega t)]$.

Le terme en x^2 de l'Eq. (16.5) va faire apparaître des termes oscillant aux fréquences harmoniques de ω . Le paramètre $\alpha \ll 1$ suggère une résolution perturbative. On cherche une solution sous la forme $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots$, où $x_1(t) = \text{Re}[X_1 \exp(-i\omega t)]$ est le terme linéaire que nous venons de calculer. Le terme $x_2(t)$ est d'ordre 1 en α , et est la première correction que nous allons calculer explicitement.¹ En se limitant à l'ordre 1 en α , seule la contribution due à $x_1(t)$ intervient dans le terme νx^2 de l'Eq. (16.5) (n'oublions pas que ν est d'ordre 1 en α). On obtient pour ce terme ² :

$$x^2 = \left[\frac{X_1}{2} \exp(-i\omega t) + \frac{X_1^*}{2} \exp(i\omega t) \right]^2 = \frac{|X_1|^2}{2} + \frac{1}{2} \text{Re}[X_1^2 \exp(-2i\omega t)]$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = -\frac{\nu}{2} |X_1|^2 - \frac{\nu}{2} \text{Re}[X_1^2 \exp(-2i\omega t)] \quad (16.6)$$

Le premier terme du membre de droite induit simplement un décalage de la position moyenne de l'électron oscillant. Le second terme induit une oscillation à la fréquence 2ω . On cherche alors une solution sous la forme :

$$x_2(t) = -\frac{\nu}{2\omega_0^2} |X_1|^2 + \text{Re}[X_2 \exp(-2i\omega t)]$$

L'insertion dans l'Eq. (16.6) conduit à :

$$X_2 = \frac{-\nu e^2 E_1^2}{2m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)^2} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2 - 2i\omega\Gamma}$$

En écrivant la densité de polarisation sous la forme $P = N(-e)(x_1 + x_2) = \epsilon_0 \chi(\omega) E + \epsilon_0 \chi_{2\omega}^{(2)} E^2$, on en déduit l'expression de la susceptibilité non linéaire d'ordre 2 :

$$\chi_{2\omega}^{(2)} = \frac{N e^3 \nu}{2m^2 \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)^2} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2 - 2i\omega\Gamma} \quad (16.7)$$

Remarques :

- L'expression (16.7) montre que l'on peut écrire

$$\chi_{2\omega}^{(2)} = \delta [\chi(\omega)]^2 \chi(2\omega) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{m \epsilon_0^2 \nu}{2 N^2 e^3}$$

¹La susceptibilité obtenue sera cependant dite d'ordre 2 car elle correspond à des termes venant du produit de deux champs. La susceptibilité d'ordre 1 est la susceptibilité linéaire.

²Pour calculer le terme non linéaire x^2 , il faut utiliser l'expression réelle de $x_1(t)$. On ne peut pas utiliser directement les amplitudes complexes dans les termes non linéaires.

On note que le paramètre δ est indépendant de ω . De plus, il se trouve qu'il varie très peu d'un matériau à l'autre. Il est donc possible de prédire la valeur de $\chi_{2\omega}^{(2)}$ (au moins son ordre de grandeur) à partir de la connaissance de la susceptibilité linéaire $\chi(\omega)$, et donc de l'indice optique $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$.

- Si l'on excite un matériau ayant une réponse $\chi_{2\omega}^{(2)}$ non nulle avec deux fréquences ω_1 et ω_2 différentes, on voit apparaître des termes oscillant à $2\omega_1$, $2\omega_2$, et $\omega_1 \pm \omega_2$. Beaucoup de fonctions peuvent être réalisées en utilisant ces sommes et différences de fréquences (amplification, rectification optique...). On ne donnera pas un exposé complet dans ce cours à vocation introductive. On trouvera des présentations détaillées dans les ouvrages de référence (par exemple [2]).
- Le potentiel que nous avons utilisé décrit un milieu qui est non centrosymétrique. En effet, un milieu centrosymétrique aurait un potentiel vérifiant $V(x) = V(-x)$, et son développement n'aurait que des puissances paires de x . Il n'y aurait donc pas de terme en x^3 dans le potentiel, et on aurait $\chi_{2\omega}^{(2)} = 0$. On retiendra qu'*un milieu centrosymétrique a nécessairement une susceptibilité $\chi_{2\omega}^{(2)}$ nulle.*

Ce résultat peut également être obtenu à partir de la relation

$$P_i(2\omega) = \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\omega) E_k(\omega)$$

issue de la définition de la susceptibilité non linéaire d'ordre deux. Si le milieu a un centre d'inversion, alors après inversion on a

$$-P_i(2\omega) = \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} [-E_j(\omega)][-E_k(\omega)] = P_i(2\omega)$$

donc la polarisation $P_i(2\omega)$ doit être nulle en tout point du milieu quel que soit le champ excitateur. La susceptibilité $\chi_{2\omega}^{(2)}$ doit donc être identiquement nulle.

16.3 Génération de second harmonique

Dans cette section, nous allons décrire le processus de génération de second harmonique ("Second Harmonic Generation" ou SHG en anglais). Une question importante est de savoir s'il suffit d'envoyer une forte puissance à la fréquence ω sur un matériau possédant une grande susceptibilité $\chi_{2\omega}^{(2)}$ pour avoir émission d'une forte puissance à la fréquence 2ω . Nous allons voir que la réponse est négative, et qu'il faut réaliser la *condition d'accord de phase* ("phase matching" en anglais) pour avoir une génération de second harmonique efficace.

16.3.1 Condition d'accord de phase

Du fait de la dispersion des matériaux, on a $n(2\omega) \neq n(\omega)$ (dans le cas de dispersion dite "normale", on a $n(2\omega) > n(\omega)$). Ainsi, la phase du signal à 2ω qui se propage ne sera pas la même que celle du signal à ω induit localement un peu plus loin au cours de la propagation de

l'onde à ω . Si le déphasage est de π , les amplitudes résultantes à 2ω s'annulent par interférences destructives (voir figure 16.2). Donc, sans précaution particulière, les signaux sont quasi nuls à la fréquence 2ω .

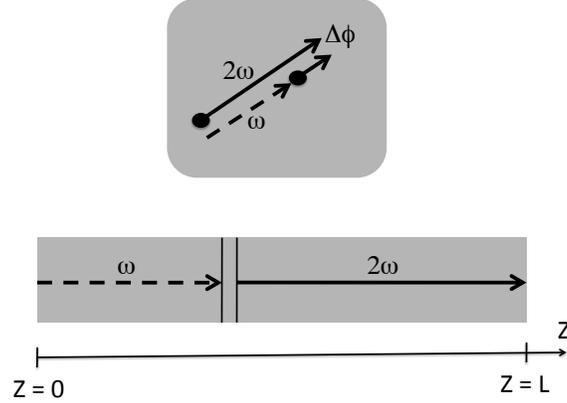


Figure 16.2: Haut : déphasage induit entre deux signaux à 2ω générés en deux points différents du matériau. Bas : modèle 1D utilisé pour la calcul de la condition d'accord de phase.

Afin de préciser la condition d'accord de phase, nous allons raisonner sur une tranche de matériau d'épaisseur L (voir figure 16.2), excitée par une onde plane monochromatique se propageant dans la direction Oz , de la forme $E(\omega) = \text{Re}[E_1 \exp(ik_1z - i\omega t)]$, avec $k_1 = n(\omega)\omega/c$.

Le champ généré à 2ω dans une tranche d'épaisseur dz comprise entre z et $z+dz$ a une amplitude complexe de la forme :

$$E(2\omega) \sim \chi_{2\omega}^{(2)} E_1^2 \exp(2ik_1z) \exp(-2i\omega t)$$

Ce champ se propage jusqu'à la sortie du matériau en $z = L$, et est de la forme :

$$E(2\omega, z = L) \sim \chi_{2\omega}^{(2)} E_1^2 \exp(2ik_1z) \exp[ik_2(L - z)] \exp(-2i\omega t)$$

avec $k_2 = 2n(2\omega)\omega/c$.

La contribution de tout le volume au signal à 2ω sortant en $z = L$ s'obtient en sommant sur z :

$$E(2\omega, z = L) \sim \chi_{2\omega}^{(2)} E_1^2 \exp(ik_2L) \int_0^L \exp[i(2k_1 - k_2)z] dz$$

La puissance émise à 2ω en sortie du milieu est $P_{2\omega} \sim |E(2\omega, z = L)|^2$ et est donc de la forme

$$P_{2\omega} \sim L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \Delta k = 2k_1 - k_2$$

Le signal à 2ω est donc maximum lorsque $\Delta k = 0$. C'est la condition d'accord de phase.

Cette condition n'est pas satisfaite par défaut, car on a en général $n(2\omega) \neq n(\omega)$. Si on ne fait rien, le signal s'annule au bout d'une longueur δ vérifiant $\Delta k \delta/2 = \pi$, et reste négligeable au-delà. On définit la longueur de corrélation $l_c = \delta/2$. On a alors :

$$l_c = \frac{\lambda}{4[n(2\omega) - n(\omega)]}$$

Exemple : avec $n(2\omega) - n(\omega) = 10^{-2}$, on obtient $l_c \simeq 25\lambda$ qui est de l'ordre de $25 \mu\text{m}$ dans le visible - proche IR. Cette épaisseur de milieu est trop faible pour recueillir un signal en pratique (le signal est proportionnel à L^2). Il faut donc réaliser la condition d'accord de phase pour pouvoir générer un signal de second harmonique.

Notons finalement que si l'on utilise la réponse non linéaire d'ordre 2 pour effectuer une somme de fréquences, on éclaire le cristal avec deux ondes ω_1 et ω_2 , pour générer une troisième onde à la fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. La condition d'accord de phase dans ce cas s'écrit $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = 0$ avec $k_i = n(\omega_i)\omega_i/c$.

16.3.2 Réalisation pratique

La manière habituelle de réaliser l'accord de phase est d'utiliser la biréfringence que présentent de nombreux cristaux (ceux dont la maille n'est pas cubique). Dans le cas d'un cristal uniaxe négatif, on fait en sorte que $n_o(\omega) = n_e(2\omega)$. La polarisation de l'onde émise à 2ω est donc celle qui correspond à l'onde extraordinaire. Afin de faire coïncider l'onde fondamentale avec l'onde ordinaire, il faut orienter le cristal par rapport à la direction de propagation et à la polarisation de l'onde incidente à ω . En utilisant ce procédé, on compense la dispersion du milieu par la biréfringence due à l'anisotropie.

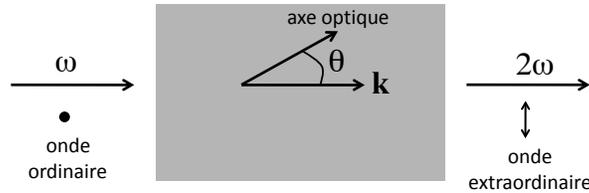


Figure 16.3: Orientation d'un cristal uniaxe pour réaliser l'accord de phase en génération de second harmonique.

Dans le cas d'un milieu uniaxe, la lumière polarisée perpendiculairement au plan défini par l'axe optique et le vecteur \mathbf{k} voit l'indice ordinaire (dans notre cas l'onde excitatrice à ω). La lumière polarisée parallèlement à ce plan (dans notre cas la lumière générée à 2ω) voit l'indice extraordinaire $n_e(\theta)$, qui dépend de l'angle θ entre le vecteur \mathbf{k} et l'axe optique (voir figure 16.3). L'angle θ vérifie la relation issue de l'ellipsoïde des indices à la fréquence 2ω :

$$\frac{1}{n_e^2(\theta, \omega)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2(\omega)} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2(\omega)}$$

L'accord de phase est obtenu en ajustant l'angle θ pour que la condition $\Delta k = 0$ soit satisfaite. Dans le cas de la génération de second harmonique, cela revient à obtenir $n_e(\theta, 2\omega) = n_o(\omega)$. En utilisant la relation ci-dessus, cela conduit à :

$$\sin^2 \theta = \frac{\frac{1}{n_o^2(\omega)} - \frac{1}{n_o^2(2\omega)}}{\frac{1}{n_e^2(2\omega)} - \frac{1}{n_o^2(2\omega)}}$$

Cette relation donne l'angle d'orientation du cristal. Notons qu'il n'y a pas forcément de solution à cette équation (notamment si la dispersion est trop importante et la biréfringence trop faible). Pour KDP, on a $n_o(\lambda = 694 \text{ nm}) = 1,506$, $n_e(\lambda = 694 \text{ nm}) = 1,466$, $n_o(\lambda = 347 \text{ nm}) = 4,534$, $n_e(\lambda = 347 \text{ nm}) = 1,487$. On obtient $\theta = 50^\circ$.

Un défaut de l'accord de phase par orientation du cristal est que pour l'onde extraordinaire, le vecteur de Poynting (flux d'énergie) ne suit pas l'orientation du vecteur \mathbf{k} . Au cours de la propagation, si l'angle θ n'est ni 0 ni 90° , le rayon ordinaire à ω et le rayon extraordinaire se séparent progressivement, ce qui réduit le recouvrement entre les deux champs nécessaire à la génération du signal non linéaire. Il existe d'autre moyen d'obtenir l'accord de phase. Pour certains cristaux (comme le Niobate de Lithium LiNbO_3), la biréfringence dépend de la température. On peut alors maintenir $\theta = 90^\circ$ et jouer sur la température pour ajuster la biréfringence jusqu'à obtention de l'accord de phase. Un autre approche est d'utiliser un milieu structuré dans lequel $\chi_{2\omega}^{(2)}$ est hétérogène et peut introduire des déphasages qui compensent ceux créés par la propagation (par exemple un empilement de couches dans lesquelles le signe de $\chi_{2\omega}^{(2)}$ est alterné). On peut alors réaliser un quasi accord de phase (voir l'exemple donné en TD).

16.3.3 Notation contractée

En génération de second harmonique, on utilise souvent en pratique les coefficients non linéaires d_{ij} plutôt que le tenseur de susceptibilité $\chi_{ijk}^{(2)}$. On remarque en effet que dans l'écriture

$$P_i(2\omega) = \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j(\omega) E_k(\omega)$$

permuter les indices j et k ne change rien. On peut donc "contracter" l'écriture, en écrivant par exemple la composante x de la polarisation sous la forme

$$\begin{aligned} P_x(2\omega) &= \epsilon_0 \chi_{xxx}^{(2)} E_x^2(\omega) + [\epsilon_0 \chi_{xxy}^{(2)} E_x(\omega) E_y(\omega) + \epsilon_0 \chi_{xyx}^{(2)} E_y(\omega) E_x(\omega)] + \dots \\ &= 2 \epsilon_0 d_{11} E_x^2(\omega) + 4 \epsilon_0 d_{16} E_x(\omega) E_y(\omega) + \dots \end{aligned}$$

Notons que le facteur 2 dans la définition du tenseur d_{ij} est conventionnelle [2]. La règle définissant les composantes du tenseur d_{mn} est alors :

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, 3 \quad \text{pour } x, y, z \\ n &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \text{pour } xx, yy, zz, yz, xz, xy \end{aligned}$$

La polarisation conduisant à la génération de second harmonique s'écrit finalement :

$$\begin{pmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{pmatrix}$$

16.4 Autres applications de la réponse non linéaire d'ordre 2

16.4.1 Addition de fréquences

Le calcul de la susceptibilité $\chi^{(2)}$ peut être effectué avec deux champs excitateurs à deux fréquences différentes ω_1 et ω_2 (on suppose $\omega_1 > \omega_2$). On aboutit à :

$$\chi_{\omega_1 \pm \omega_2}^{(2)} = \frac{N e^3 \nu}{m^2 \epsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2 - i\omega_1 \Gamma)} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_2^2 - i\omega_2 \Gamma)} \frac{1}{\omega_0^2 - (\omega_1 \pm \omega_2)^2 - i(\omega_1 \pm \omega_2) \Gamma} \quad (16.8)$$

On voit qu'on induit une polarisation oscillant à la fréquence somme $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, qui va rayonner un champ à cette même fréquence. Le processus est schématisé sur la figure 16.4. Du point de vue quantique, il peut être compris comme l'absorption simultanée de deux photons à ω_1 et ω_2 , suivie de l'émission d'un photon à la fréquence ω_3 . Ces processus mettent en jeu deux niveaux virtuels. Le processus d'addition de fréquences est très semblable au processus

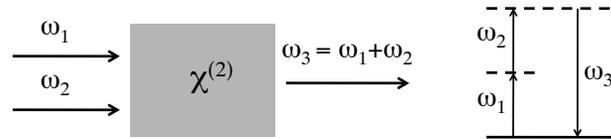


Figure 16.4: Représentation du processus d'addition de fréquences. Le diagramme de droite est un schéma des niveaux d'énergie quantiques mis en jeu dans un atome du milieu non linéaire. Les niveaux en pointillés sont des niveaux virtuels.

de génération de second harmonique (ce dernier est un cas particulier dans lequel $\omega_1 = \omega_2$). Une application de ce processus est la génération d'une source ultraviolet (UV) accordable, par addition de deux faisceaux issus de deux lasers visibles, dont l'un est accordable. Une autre application est la conversion d'un signal infrarouge (IR) à la fréquence ω_1 en un signal visible à la fréquence $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, plus facilement détectable. Dans ce cas, on a en général des intensités vérifiant $I(\omega_2) \gg I(\omega_1)$, ce qui permet en plus d'amplifier le signal car $I(\omega_3) \sim I(\omega_1) \times I(\omega_2)$.

16.4.2 Soustraction de fréquences

L'expression (16.8) montre que l'on peut également générer un champ à la fréquence $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$. Ce processus est schématisé sur la figure 16.5. Si l'on s'en tient au calcul classique, le processus de soustraction de fréquences repose sur un principe similaire à celui donnant lieu à la somme des fréquences. Cependant, le diagramme énergétique qui symbolise le processus quantique montre une différence essentielle. La génération du photon à la fréquence ω_3 s'accompagne de la disparition d'un photon à la fréquence ω_1 , et de la création d'un photon à la fréquence ω_2 (ceci est requis pour satisfaire la conservation de l'énergie). Après avoir absorbé le photon à ω_1 , l'atome se désexcite par un processus d'émission à deux photons qui est stimulé par la présence du faisceau à ω_2 .³

³L'atome peut aussi se désexciter sans la présence du faisceau à ω_2 . Le champ généré dans ce cas est beaucoup moins intense, puisqu'il s'agit d'une émission spontanée (et non stimulée) à deux photons depuis un niveau virtuel.

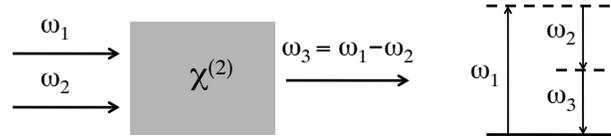
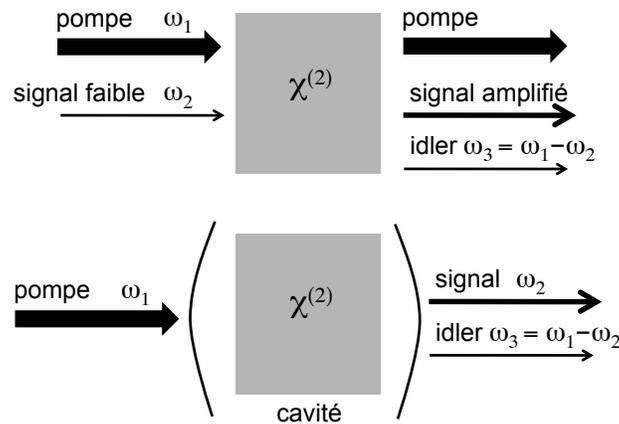


Figure 16.5: Représentation du processus de soustraction de fréquences.

16.4.3 Amplification paramétrique et oscillateur paramétrique optique

Nous avons vu que lors de la génération de la différence de fréquences, la présence du faisceau à ω_2 peut stimuler l'émission de nouveaux photons à ω_2 . On peut donc amplifier un faisceau à la fréquence ω_2 , en le couplant avec un faisceau à ω_1 dans un cristal non linéaire $\chi^{(2)}$. Ce processus porte le nom d'*amplification paramétrique*. Notons qu'il s'accompagne forcément de l'émission de photons à la fréquence ω_3 . Le faisceau à ω_2 est appelé *signal*, le faisceau à ω_1 est appelé faisceau *pompe* (en général on a $I(\omega_1) \gg I(\omega_2)$), et le faisceau émis à ω_3 est appelé *idler* (voir figure 16.6). La condition d'accord de phase, nécessaire pour avoir un processus efficace, s'écrit dans ce cas $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$.

Figure 16.6: Représentation du processus d'amplification paramétrique (figure du haut) et d'un oscillateur paramétrique optique (figure du bas). La cavité est formée de miroirs très réfléchissants à la fréquence ω_2 .

Si l'on place l'amplificateur dans une cavité (type Fabry-Pérot), le système lorsqu'il est pompé peut se mettre à osciller même sans faisceau incident à ω_2 . C'est ce qui se passe avec tout amplificateur contre-réactionné. L'oscillation se déclenche à partir d'un bruit, ici l'émission spontanée (l'effet Larsen en acoustique, utilisant un amplificateur électronique, est un exemple du même phénomène). Il se crée alors une forte intensité à ω_2 dans la cavité, qui favorise le processus

Ce processus est appelé *fluorescence paramétrique*.

d'émission stimulée. Ce système porte le nom d'*oscillateur paramétrique optique (OPO)*. Notons qu'il s'agit d'un système accordable, puisque toute fréquence $\omega_2 < \omega_1$ est susceptible de donner lieu à l'effet d'amplification (la fréquence ω_3 du faisceau idler s'ajuste pour satisfaire $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$). Le choix de la fréquence d'émission ω_2 se fait en pratique par la condition d'accord de phase $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, et par le choix d'une cavité résonante à ω_2 .

Références

- [1] N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York, 1964).
- [2] R.W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd edition (Academic Press, Amsterdam, 2003).
- [3] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique* (Ellipses, Paris, 1997).

Chapitre 17

Coefficients d'Einstein, excitation, relaxation

Objectifs

- Rappeler les notions d'absorption, émission stimulée et émission spontanée et définir les coefficients d'Einstein.
- Discuter les processus d'excitation et de relaxation de systèmes quantiques en interaction avec un champ électromagnétique. Introduire les phénomènes de saturation.

17.1 Approche phénoménologique

L'approche phénoménologique de l'interaction entre un rayonnement électromagnétique et un atome a été introduite par Einstein (1917). Dans de nombreuses situations où le couplage entre les atomes et l'environnement reste important, elle permet une description quantitative des processus élémentaires d'interaction rayonnement-matière. La connaissance des coefficients d'Einstein et des équations de relaxation associées suffit par exemple au dimensionnement de la plupart des sources de lumière (lasers ou LED) ou d'autres dispositifs optoélectroniques. Nous verrons au chapitre suivant comment ces coefficients peuvent être calculés précisément grâce à la théorie quantique.

On considère un gaz de N atomes à deux niveaux d'énergie dans une cavité, en interaction avec un rayonnement électromagnétique (le fait de considérer un gaz signifie simplement que les atomes sont supposés sans interaction entre eux). On note 1 le niveau fondamental (énergie E_1 , dégénérescence g_1) et 2 le niveau excité (énergie E_2 , dégénérescence g_2). N_1 atomes sont sur le niveau 1, et N_2 sur le niveau 2, avec $N_1 + N_2 = N$. On note ω la fréquence de Bohr de la transition atomique, définie par $\hbar\omega = E_2 - E_1$. Le champ de rayonnement électromagnétique dans la cavité est caractérisé par une densité volumique d'énergie par unité de fréquence $u(\omega)$ (unité $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{Hz}^{-1}$), telle que $u(\omega)d\omega$ soit la densité d'énergie radiative dans la bande de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$. On suppose que la densité d'énergie varie lentement autour de la fréquence de Bohr de la transition (c'est une condition de validité de la théorie d'Einstein).

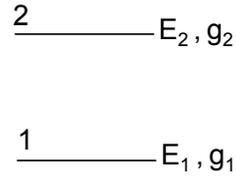


Figure 17.1: Atome à deux niveaux. g_1 et g_2 sont les dégénérescences de chaque niveau d'énergie (nombre d'états quantiques dans chaque niveau d'énergie).

Einstein a postulé que l'interaction entre les atomes et le rayonnement se fait selon trois processus (ces postulats ont été justifiés *a posteriori* par la théorie quantique).

- Absorption

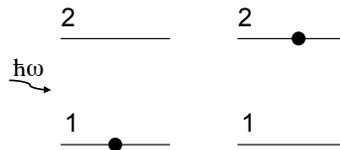


Figure 17.2: Représentation schématique du mécanisme d'absorption. A gauche, l'état initial. A droite, l'état final.

La probabilité par unité de temps pour un atome d'absorber un photon d'énergie $\hbar\omega$ s'écrit $B_{12}u(\omega)$. B_{12} est le coefficient d'Einstein d'absorption.

- Emission spontanée

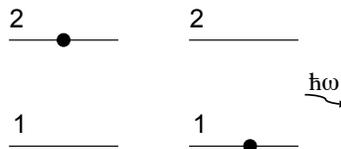


Figure 17.3: Représentation schématique du mécanisme d'émission spontanée.

La probabilité par unité de temps pour un atome d'émettre spontanément un photon d'énergie $\hbar\omega$ s'écrit A_{21} . A_{21} est le coefficient d'Einstein d'émission spontanée (homogène à l'inverse d'un temps).

- Emission stimulée

La probabilité par unité de temps pour un atome d'émettre un photon d'énergie $\hbar\omega$ s'écrit $B_{21}u(\omega)$. Le photon émis a même fréquence ω , même vecteur d'onde \mathbf{k} et même phase que le photon incident. B_{21} est le coefficient d'Einstein d'émission stimulée (ou émission induite).

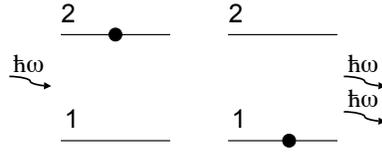


Figure 17.4: Représentation schématique du mécanisme d'émission stimulée.

17.2 Equations de bilan

17.2.1 Forme générale

Pour un ensemble de N atomes, on peut écrire une équation d'évolution du nombre d'atomes sur chaque niveau sous l'action des trois processus d'interaction avec le rayonnement :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = A_{21}N_2 - B_{12}N_1u(\omega) + B_{21}N_2u(\omega) . \quad (17.1)$$

On a de plus :

$$N = N_1 + N_2 \quad (17.2)$$

17.2.2 Régime stationnaire

En régime stationnaire, l'Eq. (17.1) se simplifie pour donner :

$$A_{21}N_2 - B_{12}N_1u(\omega) + B_{21}N_2u(\omega) = 0 . \quad (17.3)$$

17.2.3 Equilibre thermodynamique. Relations entre les coefficients

Si on suppose la cavité contenant le gaz d'atomes à l'équilibre thermodynamique (température T), la densité d'énergie radiative doit être donnée par la loi de Planck. On la notera $u_T(\omega)$. De l'Eq. (17.3), on déduit (l'équilibre étant un cas particulier de régime stationnaire) :

$$u_T(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12}N_1/N_2 - B_{21}} . \quad (17.4)$$

Le gaz d'atomes est supposé à la limite classique. Les populations des deux niveaux d'énergie sont pilotées par la statistique de Maxwell-Boltzmann. On a donc :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1 \exp(-E_1/k_B T)}{g_2 \exp(-E_2/k_B T)} = \frac{g_1}{g_2} \exp(\hbar\omega/k_B T) \quad (17.5)$$

où k_B est la constante de Boltzmann. En introduisant (17.5) dans (17.4), on aboutit à :

$$u_T(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{12} g_1/g_2 \exp(\hbar\omega/k_B T) - B_{21}} . \quad (17.6)$$

On sait par ailleurs que la densité d'énergie radiative dans la cavité à l'équilibre est donnée par la loi de Planck :

$$u_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (17.7)$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. En identifiant les expressions (17.6) et (17.7), on obtient les relations suivantes entre les coefficients d'Einstein :

$$\begin{aligned} \frac{A_{21}}{B_{21}} &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \\ g_1 B_{12} &= g_2 B_{21} \end{aligned} \quad (17.8)$$

Ces relations, obtenues pour la première fois par Einstein, montrent que les trois coefficients décrivant les trois processus d'interaction rayonnement-matière ne sont pas indépendants (un seul coefficient est à déterminer).

Nous terminerons par deux remarques. D'une part, le raisonnement d'Einstein montre que l'existence du processus d'émission stimulée est nécessaire pour retrouver la forme de la loi de Planck. D'autre part, les relations obtenues sont valables pour un champ de rayonnement homogène et isotrope. Elles restent valables aussi pour un faisceau éclairant un gaz (ou un liquide) contenant un grand nombre d'atomes distribués aléatoirement en direction.

17.3 Une autre écriture des équations de bilan

Dans la situation la plus générale (même hors d'équilibre), on peut écrire la densité d'énergie radiative sous la forme :

$$u(\omega) = N(\omega) n_{ph} \hbar\omega \quad (17.9)$$

Dans cette expression, $N(\omega)$ est la densité de mode, définie de telle sorte que $N(\omega)d\omega$ soit le nombre de modes optiques par unité de volume dans la bande de fréquences $[\omega, \omega + d\omega]$, n_{ph} est le nombre de photon dans chaque mode et $\hbar\omega$ l'énergie d'un photon. Le produit de ces trois termes donne bien la densité d'énergie dans la bande de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$ qui intervient dans les équations d'Einstein. A l'équilibre thermique, et dans le vide, n_{ph} est donné par la statistique de Bose-Einstein $n_{ph} = 1/[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]$, et $N(\omega) = \omega^2/(\pi^2 c^3)$ (voir l'annexe du cours "Lumière et Images" sur la démonstration de la loi de Planck). On retrouve bien l'expression (17.7).

Notons maintenant que si l'on considère le cas de l'équilibre thermique dans un milieu quelconque dont la densité de mode est $N(\omega)$, alors la relation entre les coefficients d'Einstein d'émission stimulée et d'émission spontanée devient :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \hbar\omega N(\omega) \quad (17.10)$$

En utilisant cette relation, on peut réécrire le terme d'émission stimulé sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= B_{21} N_2 u(\omega) \\ &= \frac{A_{21}}{\hbar\omega N(\omega)} N_2 u(\omega) \\ &= A_{21} N_2 n_{ph} \end{aligned}$$

Le taux de désexcitation par émission stimulée s'écrit donc comme le produit du taux de désexcitation par émission spontanée et du nombre de photons par mode à la fréquence ω . Cette écriture est particulièrement utile lorsqu'on s'intéresse à l'émission dans un mode particulier (dans le cas de l'étude des lasers par exemple). Dans ce cas, n_{ph} est le nombre de photons dans le mode, et il évolue selon l'équation :

$$\frac{dn_{ph}}{dt} = A_{21} N_2 n_{ph} + \beta A_{21} N_2 \quad (17.11)$$

Le facteur β donne la fraction de photons émis par émission spontanée qui vont dans le mode considéré ($\beta = 1$ dans le cas d'une cavité monomode dans laquelle l'émission spontanée ne peut avoir lieu que dans le mode existant).

17.4 Excitation optique d'atomes à deux niveaux

On s'intéresse à une collection d'un grand nombre N d'atomes à deux niveaux, excités par un champ électromagnétique extérieur de densité d'énergie $u(\omega)$. La transition correspond à une fréquence dans le domaine visible ($\omega \simeq 10^{15}$ Hz), et le gaz d'atomes est à température ambiante. La condition $\hbar\omega \gg k_B T$ est alors vérifiée, de telle sorte que la population du niveau 2 due au champ de rayonnement thermique est négligeable (sans le champ extérieur, tous les atomes sont dans le niveau fondamental).

On suppose que les niveaux sont non dégénérés ($g_1 = g_2 = 1$). On notera alors $B_{12} = B_{21} = B$ et A le coefficient d'Einstein d'émission spontanée pour alléger les notations.

17.4.1 Régime stationnaire

Dans le cas du régime stationnaire, et avec les notations simplifiées, l'équation de bilan (17.3) s'écrit :

$$AN_2 + B(N_2 - N_1)u(\omega) = 0 . \quad (17.12)$$

Définissons la densité d'énergie de saturation $u_s(\omega)$ par :

$$A = u_s(\omega)B . \quad (17.13)$$

Il s'agit de la densité d'énergie pour laquelle le taux d'émission spontanée et le taux d'émission stimulée sont égaux. On peut alors écrire l'équation de bilan sous la forme :

$$N_2 u_s(\omega) + (N_2 - N_1)u(\omega) = 0 . \quad (17.14)$$

Les Eqs. (17.2) et (17.14) permettent de déterminer les deux populations N_1 et N_2 , qui s'écrivent :

$$N_1 = N \frac{u_s(\omega) + u(\omega)}{u_s(\omega) + 2u(\omega)} \quad (17.15)$$

$$N_2 = N \frac{u(\omega)}{u_s(\omega) + 2u(\omega)} \quad (17.16)$$

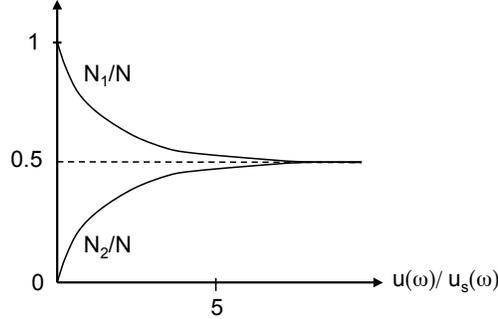


Figure 17.5: Evolution des populations N_1 et N_2 en régime stationnaire, en fonction de la densité d'énergie du rayonnement incident.

L'évolution des populations est représentée sur la Fig. 17.5. On observe un comportement non linéaire. A grande densité d'énergie ($u \gg u_s$), les populations tendent vers la même valeur $N_1 = N_2 = N/2$. Ce comportement décrit la *saturation* de la transition.

Le calcul précédent a deux autres conséquences importantes :

- Il n'est pas possible d'inverser les populations, c'est-à-dire d'avoir $N_2 > N_1$. Pour atteindre l'inversion de population, nécessaire à l'obtention d'un gain, il faut utiliser des systèmes mettant en jeu au minimum 3 niveaux. L'inversion est même plus facile à obtenir sur un système à 4 niveaux. Nous reviendrons sur ce point dans le cours sur les lasers.
- Lorsque l'excitation est intense ($u(\omega) \gg u_s(\omega)$), $N_2 \rightarrow N_1$ et le milieu devient optiquement transparent. Cela revient à dire que l'émission stimulée compense exactement l'absorption, et que l'émission spontanée est négligeable. On parle d'*absorption saturée*.

17.4.2 Régime dynamique : excitation et relaxation

On s'intéresse dans un premier temps à la phase d'excitation du gaz d'atomes. A l'instant $t = 0$, tous les atomes sont dans l'état fondamental, et on branche l'excitation $u(\omega)$. La solution de l'équation de bilan (17.1) est alors :

$$N_2(t) = N \frac{u(\omega)}{u_s(\omega) + 2u(\omega)} \{1 - \exp[-(A + 2Bu(\omega))t]\} . \quad (17.17)$$

Pour $t \rightarrow \infty$, N_2 tend vers sa valeur stationnaire. Le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire dépend de l'intensité d'excitation.

On s'intéresse maintenant à la relaxation d'un ensemble d'atomes excités. A l'instant $t = 0$, on suppose le régime stationnaire établi, et on coupe l'excitation $u(\omega)$. La solution de l'équation de bilan (17.1) s'obtient très facilement :

$$N_2(t) = N_2^{stat} \exp(-At) \quad (17.18)$$

où N_2^{stat} est la population du niveau 2 en régime stationnaire à l'instant $t = 0$. Les atomes se désexcitent spontanément (émission fluorescente). La décroissance exponentielle est caractérisée par un temps $\tau_R = 1/A$ qui est la *durée de vie radiative* du niveau excité. La mesure de la décroissance exponentielle du rayonnement de fluorescence est un moyen d'accéder expérimentalement à la valeur du coefficient d'Einstein d'émission spontanée A .

17.4.3 Ordres de grandeur

Pour des atomes (ou molécules) et des transitions électroniques dans le domaine visible ou proche infrarouge, on a $\tau_R \sim 10^{-7} - 10^{-9}$ s.

On peut aussi donner un ordre de grandeur de l'intensité de saturation. On a en termes de densité d'énergie : $u_s(\omega) = A_{21}/B_{21} = \hbar\omega^3/(\pi^2c^3)$. En pratique, on raisonne plutôt avec l'intensité $I_s(\omega) = cu_s(\omega)\Delta\omega$ (unité $W.m^{-2}$), où $\Delta\omega$ est la largeur spectrale du rayonnement, supposé large bande dans la théorie d'Einstein. On obtient alors :

$$I_s(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^2} \Delta\omega \quad (17.19)$$

Pour une source classique, on a typiquement $\Delta\omega \simeq 10^{10}$ Hz. Pour une fréquence de transition $\omega \simeq 10^{15}$ Hz, on a donc $I_s(\omega) \simeq 0.1 W.cm^{-2}$. Cette intensité est au-moins un ordre de grandeur au-dessus de l'intensité des lampes classiques les plus puissantes. Il est donc difficile de voir les phénomènes de saturation avec des sources classiques. En revanche, avec des lasers, on peut atteindre des intensités beaucoup plus grandes. Mais dans le cas de rayonnement à largeur spectrale étroite, le raisonnement ci-dessus n'est plus valable. Il faut avoir recours à une approche plus fine (équations de Bloch optiques, voir Annexe). A un facteur numérique près, l'expression ci-dessus reste valable, à condition de remplacer la largeur spectrale $\Delta\omega$ par la largeur de la transition $\Gamma \simeq 1/\tau_R$.

17.5 Mécanismes d'excitation et de relaxation non radiatifs

Dans cette dernière partie, nous examinons les phénomènes dynamiques responsables de l'évolution des populations dans des systèmes quantiques. Nous avons déjà étudié l'excitation et la relaxation due au couplage avec le champ électromagnétique (dans le cas de l'atome à deux niveaux, mais les comportements décrits sont généraux), et nous allons passer en revue brièvement les autres mécanismes possibles.

17.5.1 Excitation non optique

Chocs dans les gaz

Par collision, l'énergie cinétique d'une molécule B peut servir à exciter un atome ou une molécule A (choc inélastique). Ces chocs peuvent être la conséquence de l'agitation thermique. Dans ce cas, l'énergie potentielle acquise est $E = 3/2 k_B T \simeq 1,5 \times 0,7 T \text{ cm}^{-1} \simeq T \text{ en cm}^{-1}$. Les chocs peuvent aussi provenir d'électrons accélérés (bombardement électronique). Avec une différence

de potentiel V , les électrons ont une énergie $E = eV$. Or $1 \text{ eV} \simeq 8000 \text{ cm}^{-1}$, $2 \text{ eV} \simeq 16000 \text{ cm}^{-1} \simeq 625 \text{ nm}$ (rouge).

Jonction PN polarisée en direct

Dans ce cas, les électrons de la bande de conduction de la région dopée n peuvent passer dans la bande de valence de la région dopée p en émettant un photon (dont l'énergie est de l'ordre de l'énergie de gap du semiconducteur). Le mécanisme est illustrée sur la figure 17.6. Il est à la base du fonctionnement des diodes électroluminescentes (LED) et des diodes laser.

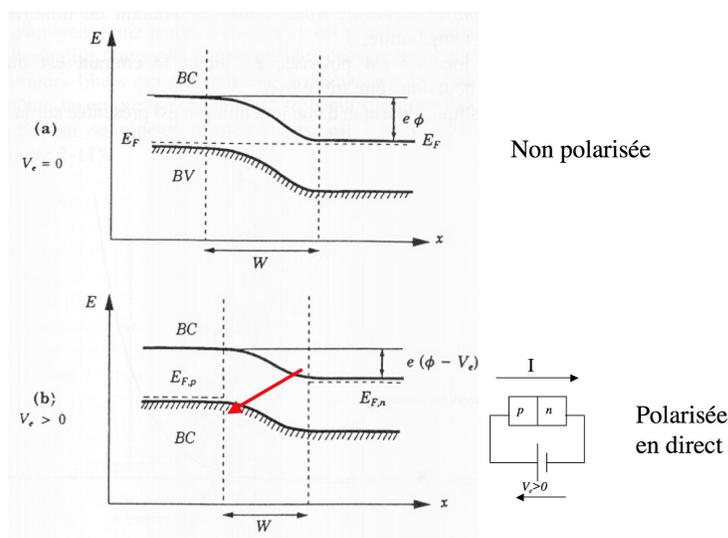


Figure 17.6: Emission de lumière par une jonction PN polarisée en direct.

Réactions chimiques

Une réaction chimique peut laisser certains produits de la réaction dans un état excité (ex : radicaux dans une flamme, synthèse de HF). Dans une flamme, les radicaux excités sont responsables de l'émission de lumière à certaines fréquences visibles, au-delà du spectre de rayonnement thermique dû aux molécules et aux suies à l'équilibre thermodynamique (ex : émission de lumière verte ou bleue).

17.5.2 Relaxations non radiatives

La relaxation du système excité dans un état d'énergie plus faible peut se faire radiativement par émission spontanée, comme nous l'avons déjà vu. Il existe d'autres mécanismes possibles de désexcitation.

Collisions

C'est le mécanisme inverse de celui discuté ci-dessus dans le cas de l'excitation. L'atome excité B, ou la molécule, va céder son énergie potentielle au cours de la collision avec l'atome A, et augmenter l'énergie cinétique du système (A, B).

Couplage avec des modes de vibration

Un système excité peut relaxer en transférant son énergie aux modes de vibrations d'une molécule ou d'un solide. Dans un solide, les modes de vibration sont les phonons. Ceux-ci peuvent se thermaliser (par collisions phonons-phonons), ce qui conduit à un échauffement du milieu.

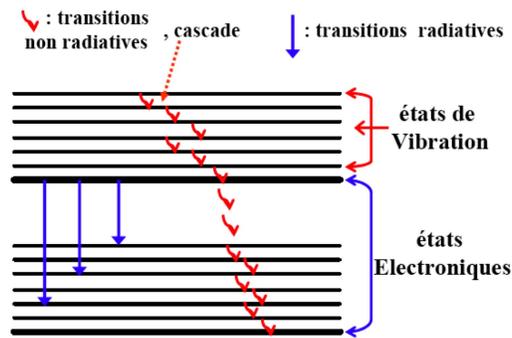


Figure 17.7: Relaxations non radiatives dues aux modes de vibration.

17.6 Largeur des raies spectrales

Du fait de la durée de vie finie de l'état excité, les raies d'émission ont une largeur spectrale non nulle. Nous discutons ici des mécanismes induisant cette largeur spectrale.

17.6.1 Largeur naturelle

Du fait de l'émission spontanée, même en l'absence d'interaction avec un autre système (autre que le champ électromagnétique lui-même), la durée de vie de l'état excité est finie. La probabilité d'être dans l'état excité décroît exponentiellement en $\exp(-t/\tau_R)$, où $\tau_R = 1/A$ est la durée de vie radiative (typiquement de 10^{-9} à 10^{-7} s). Ceci induit une raie spectrale de forme Lorentzienne (transformée de Fourier de l'exponentielle). Pour décrire une raie spectrale, on utilise en général le profil de raie normalisé $F(\omega)$, tel que $F(\omega)d\omega$ soit la probabilité d'émission d'un photon entre ω et $\omega + d\omega$ (on doit donc avoir $\int F(\omega)d\omega = 1$). Le profil Lorentzien est donné par :

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \quad (17.20)$$

Dans cette expression, ω_0 est la fréquence de transition (centre de la raie) et Γ la largeur à mi-hauteur. Dans le cas de la largeur naturelle, on a $\Gamma = 1/\tau_R$.

Dans un environnement matériel (solide, liquide ou gaz), cette largeur naturelle est rarement observée à cause des autres causes d'élargissement.

17.6.2 Elargissements homogènes

Ce sont les causes d'élargissements qui affectent chaque atome ou molécule de la même façon. Citons par exemple :

- L'élargissement collisionnel dans un gaz. Si la probabilité que l'atome (ou la molécule) se désexcite par collision est supérieure à $A = 1/\tau_R$, alors la désexcitation collisionnelle fixe la durée de vie de l'état excité et donc la largeur de raie. On aura alors $\Delta\omega = 1/\tau_c$, où τ_c est l'intervalle de temps moyen entre deux chocs. Pour un gaz à l'équilibre thermodynamique, ce temps se calcule par la théorie cinétique des gaz.
- Les transitions non radiatives dans la matière condensée. Par exemple dans un solide l'atome peut se désexciter par collision avec un phonon, ou en émettant un phonon. Les durées de vie associées sont typiquement de 10^{-12} à 10^{-10} s.

17.6.3 Elargissements inhomogènes

Ce sont les élargissements que l'on rencontre pour un ensemble d'atomes (ou de molécules) dont les raies spectrales se décalent les unes par rapport aux autres. L'ensemble de ces raies spectrales forme une raie effective élargie (voir figure 17.8). Citons par exemple :

- L'effet Doppler dans un gaz. Si une molécule a une vitesse \mathbf{v} dans le référentiel du laboratoire, l'observateur observe une fréquence $\omega = \omega_{01}(1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c)$, où ω_{01} est la fréquence dans le référentiel de la molécule et \mathbf{u} le vecteur unitaire dans la direction d'observation. Comme la direction de \mathbf{v} est quelconque, on a une distribution de fréquences ω . Pour une observation dans la direction (Oz) , le nombre de molécule ayant une vitesse v_z dans l'intervalle $[v_z, v_z + dv_z]$ suit une distribution de Maxwell. Ceci conduit à une distribution Gaussienne des fréquences observées.
- Fluctuations du champ cristallin dans les solides. On sait que dans un champ cristallin les niveaux d'énergies des ions sont modifiés (déplacement, levée de dégénérescence). La présence de défauts ou de lacunes dans la maille cristalline va créer des fluctuations du champ cristallin local. A la distribution de défauts sera associée une distribution de l'énergie des transitions et donc une largeur inhomogène. Ces effets sont généralement importants (qq cm^{-1}), sauf dans le cas d'excellents cristaux lorsque les rayons ioniques des dopants sont très voisins de ceux des ions substitués.

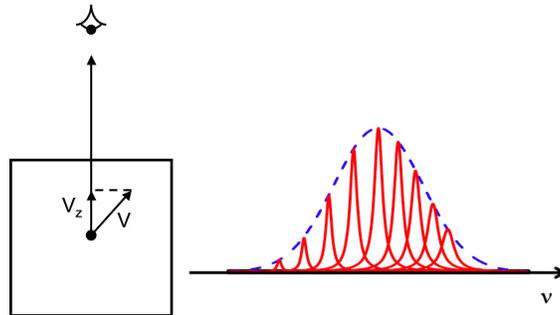


Figure 17.8: Illustration des mécanismes d'élargissement inhomogène. A gauche élargissement Doppler dans un gaz. A droite, largeur spectrale résultant d'un ensemble de raies dont les énergies sont décalées les unes par rapport aux autres.

Références

- [1] A. Einstein, "Zur Quantentheorie der Strahlung", Phys. Z. vol. 18, pp. 121-128 (1917)
- [2] B.L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1968). Contient une traduction en anglais de l'article original d'Einstein de 1917.
- [3] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, 2000), 3ème édition, Chapitre 1.

Chapitre 18

Interaction rayonnement-matière. Traitement quantique

Objectifs

- Appliquer la méthode des perturbations au calcul des coefficients d'Einstein (on se limite au hamiltonien dipolaire électrique).
- Calculer l'indice optique d'un gaz d'atomes à partir du formalisme quantique, et connecter le résultat au modèle classique de l'électron élastiquement lié que nous avons vu au chapitre 16.

18.1 Forme du hamiltonien d'interaction

Nous allons introduire dans cette section la notion de moment dipolaire de transition et le hamiltonien dipolaire électrique de la manière la plus intuitive possible. Pour une introduction plus rigoureuse de ces concepts, voir par exemple [1].

18.1.1 Opérateur moment dipolaire

Considérons un électron d'un atome dans l'état ψ . La position moyenne de l'électron à l'instant t est :

$$\langle \mathbf{r} \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{r} | \psi \rangle = \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{r} d^3r \quad (18.1)$$

où l'on a utilisé la représentation “fonction d'onde” dans la dernière égalité. Par analogie avec la physique classique, on introduit le moment dipolaire électrique moyen associé à cet électron :

$$\langle \mathbf{D} \rangle_\psi = -e \langle \mathbf{r} \rangle_\psi \quad (18.2)$$

où e est la charge de l'électron. On introduit ainsi l'*opérateur moment dipolaire électrique* $\mathbf{D} = -e\mathbf{r}$ dont la valeur moyenne quantique dans l'état ψ donne la valeur du moment dipolaire

moyen dans cet état (un grand nombre de mesures du moment dipolaire donnerait en moyenne la valeur $\langle \mathbf{D} \rangle_\psi$).

Remarque : dans un atome contenant Z électrons, on a $\mathbf{D} = -e \sum_{i=1}^Z \mathbf{r}_i$, où \mathbf{r}_i est la position de l'électron numéro i .

18.1.2 Moment dipolaire de transition

On s'intéresse à un électron dans un système à deux niveaux 1 et 2 non dégénérés (modèle le plus simple d'atome), et on note ω_0 la fréquence de transition ($\hbar\omega_0 = E_2 - E_1$, avec E_1 et E_2 les énergies des états stationnaires 1 et 2). Nous allons introduire de manière intuitive la notion de moment dipolaire de transition. Supposons l'électron dans une superposition des deux états stationnaires 1 et 2. La fonction d'onde à l'instant t s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = a |\phi_1\rangle \exp\left(-i\frac{E_1}{\hbar}t\right) + b |\phi_2\rangle \exp\left(-i\frac{E_2}{\hbar}t\right) \quad (18.3)$$

où a et b sont des constantes supposées réelles pour prendre le cas le plus simple. Le moment dipolaire de l'atome s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D} \rangle_\psi &= 2ab \operatorname{Re}[\langle \phi_1 | \mathbf{D} | \phi_2 \rangle \exp(-i\omega_0 t)] \\ &= 2ab \langle \phi_1 | \mathbf{D} | \phi_2 \rangle \cos(\omega_0 t) . \end{aligned} \quad (18.4)$$

On a utilisé le fait que dans un système atomique, et plus généralement dans tout système centrosymétrique dans lequel les états électroniques ont une parité bien définie, on a $\langle \phi_1 | \mathbf{r} | \phi_1 \rangle = 0$ et $\langle \phi_2 | \mathbf{r} | \phi_2 \rangle = 0$. De plus, l'élément de matrice $\langle \phi_1 | \mathbf{r} | \phi_2 \rangle$ est réel pour des états liés.

L'expression (18.4) montre que le moment dipolaire moyen de l'atome oscille à la fréquence ω_0 . La quantité $\langle \phi_1 | \mathbf{D} | \phi_2 \rangle$ est l'élément de matrice de l'opérateur moment dipolaire électrique de la transition $2 \rightarrow 1$. On l'appelle plus simplement *moment dipolaire de transition*. Elle intervient souvent dans les calculs d'interaction atomes - champ électromagnétique, comme nous allons le voir dans la suite.

18.1.3 Hamiltonien dipolaire électrique

La démonstration complète de la forme du hamiltonien d'interaction sort du cadre de ce cours (voir par exemple la référence [1]). Nous nous contenterons d'introduire de manière simpliste le hamiltonien dipolaire électrique.

Pour un système de taille très inférieure à la longueur d'onde d'excitation, la contribution principale à l'énergie d'interaction entre le système et l'onde électromagnétique est due au terme dipolaire électrique. Pour une onde plane de la forme $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, l'énergie potentielle d'interaction classique est donnée par :

$$V_{int} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) \quad (18.5)$$

où \mathbf{p} est le moment dipolaire (classique) du système placé en $\mathbf{r} = 0$. Par analogie, dans le cas d'un atome interagissant avec un champ classique, le hamiltonien dipolaire électrique (opérateur quantique) s'écrit :

$$H_{DE} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{u} E_0 \cos(\omega t) \quad (18.6)$$

Ayant maintenant la forme du hamiltonien d'interaction, nous allons appliquer les résultats de la théorie des perturbations dépendantes du temps au calcul des coefficients d'Einstein. On écrit alors le hamiltonien complet du système sous la forme $H(t) = H_0 + W(t)$ où H_0 est le hamiltonien de l'atome isolé (non perturbé par le champ extérieur) et $W(t)$ est la perturbation qui coïncide ici avec H_{DE} .

18.2 Calcul des coefficients d'Einstein

Pour une perturbation dont la dépendance temporelle est sinusoïdale, la probabilité de transition entre un état initial $|\phi_j\rangle$ et un état final $|\phi_f\rangle$ est donnée par l'expression (voir l'annexe sur la méthode des perturbations dépendantes du temps) :

$$P_{jf}(t) = \frac{|W_{fj}|^2}{4\hbar^2} t^2 \left| \text{sinc} \frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right|^2 \quad (18.7)$$

avec ici $W_{fj} = e E_0 \langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u}$. En effet, en utilisant la forme (18.6) du hamiltonien d'interaction, on a $W_{fj}(t) = e E_0 \langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u} \cos(\omega t) = W_{fj} \cos(\omega t)$.

Dans la théorie d'Einstein, le rayonnement incident sur l'atome n'est pas monochromatique, mais a une distribution spectrale. On note $I(\omega)d\omega$ l'intensité du rayonnement dans la bande de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$. Pour une onde plane, on a $I(\omega) = \epsilon_0 c / 2 |\mathbf{E}(\omega)|^2$ (unité $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$), avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Dans la théorie d'Einstein, le rayonnement est stationnaire dans le temps (sa densité d'énergie ne varie pas au cours du temps), ce qui implique que deux fréquences différentes ne sont pas corrélées (elles n'interfèrent pas). On obtient la probabilité de transition en sommant sur les fréquences :

$$P_{jf}(t) = \frac{e^2}{2\epsilon_0 c \hbar^2} t^2 |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u}|^2 \int I(\omega) \left| \text{sinc} \frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right|^2 d\omega \quad (18.8)$$

L'expression du taux de transition sous la forme donnée par Einstein s'obtient lorsque l'intensité du rayonnement varie lentement par rapport à la fonction sinc. La largeur spectrale $\Delta\omega$ de cette fonction est $2\pi/t$, et est donc d'autant plus réduite que le temps d'observation t est grand. Pour fixer un ordre de grandeur, avec un temps d'observation $t \simeq 10^{-9}$ s, on a $\Delta\omega \simeq 6.10^9$ Hz. L'approximation est donc largement valable avec des sources usuelles. Elle devient caduque uniquement lorsque l'on travaille avec des lasers spectralement étroits (et dans ce cas on doit avoir recours au formalisme plus général des équations de Bloch optiques - voir Annexe C). Si l'on assimile la fonction sinc dans l'intégrale à une distribution de Dirac :

$$\text{sinc}^2 \left[\frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right] \sim \frac{2\pi}{t} \delta(\omega - \omega_{fj}) \quad (18.9)$$

l'expression (18.8) se simplifie en :

$$P_{jf}(t) = \frac{\pi e^2}{\epsilon_0 c \hbar^2} t |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u}|^2 I(\omega_{fj}) \quad (18.10)$$

Le taux de transition par unité de temps, défini par $Q_{jf} = dP_{jf}/dt$, s'écrit alors :

$$Q_{jf}(t) = \frac{\pi e^2}{\epsilon_0 c \hbar^2} |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u}|^2 I(\omega_{fj}) \quad (18.11)$$

Ce taux de transition est l'analogie du terme $d(N_2/N)/dt$ de la théorie d'Einstein décrite au chapitre 17. En effet, pour un ensemble de N atomes, N_2/N s'interprète comme la probabilité pour un atome d'être dans l'état 2. Dans l'approche d'Einstein, le rayonnement incident est non polarisé et isotrope. Pour avoir rigoureusement le coefficient d'Einstein d'absorption (ou d'émission induite¹), il reste à moyenner sur les deux états de polarisation et les directions d'incidence de l'onde excitatrice. Notons \mathbf{k} la direction de propagation, et \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 les deux vecteurs de polarisation. Le terme à moyenner dans l'Eq. (18.11) est proportionnel à $|\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}|^2$. La moyenne sur les directions de polarisation s'écrit :

$$\frac{1}{2} \sum_{polar} |\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2} [|\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_2|^2] = \frac{1}{2} [r^2 - |\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}|^2] \quad (18.12)$$

où l'on a utilisé le fait que la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{k}\}$ est orthonormée. On peut alors effectuer la moyenne sur les directions d'incidence :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega \frac{1}{2} \sum_{polar} |\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}|^2 = \frac{1}{8\pi} \int_{4\pi} d\Omega (r^2 - r^2 \cos^2 \theta) = \frac{1}{8\pi} \left(4\pi r^2 - r^2 \int_{4\pi} \cos^2 \theta d\Omega \right) = \frac{r^2}{3} \quad (18.13)$$

où l'on a introduit l'angle θ entre \mathbf{r} et \mathbf{k} . En conclusion, effectuer les deux moyennes revient à remplacer le terme $|\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot \mathbf{u}|^2$ par $|\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle|^2 / 3$. On obtient finalement :

$$Q_{jf}(t) = \frac{\pi e^2}{3\epsilon_0 c \hbar^2} |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle|^2 I(\omega_{fi}) \quad (18.14)$$

On peut faire apparaître la densité d'énergie du rayonnement $u(\omega)$ reliée à l'intensité par $I(\omega) = cu(\omega)$. En identifiant avec l'équation donnant

$$\frac{d(N_2/N)}{dt} = B_{12} \frac{N_1}{N} u(\omega) \quad (18.15)$$

qui décrit l'absorption dans la théorie d'Einstein, et en supposant $N_1/N = 1$ afin d'avoir les mêmes conditions initiales dans les deux calculs, on aboutit à :

$$B_{12} = \frac{\pi e^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_j \rangle|^2 \quad (18.16)$$

Notons que l'on a $B_{12} = B_{21}$ car les niveaux sont non dégénérés. On voit donc que le coefficient d'Einstein s'obtient à partir du moment dipolaire de transition associé à la transition entre les deux états j et f .

Dans une théorie semi-classique comme celle que nous utilisons ici (le champ électromagnétique n'est pas quantifié), le phénomène d'émission spontanée n'apparaît pas dans la théorie. On ne peut donc pas calculer directement le coefficient d'Einstein d'émission spontanée. On peut cependant le déduire de la relation générale $A_{21}/B_{21} = \hbar\omega^3/(\pi^2 c^3)$ entre les coefficients d'émission spontanée et d'émission induite. On obtient :

$$A_{21} = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3} |\langle \phi_f | \mathbf{r} | \phi_i \rangle|^2 \quad (18.17)$$

¹C'est le signe de $\omega_{fj} = (E_f - E_j)/\hbar$ qui change lorsqu'on passe de l'absorption à l'émission induite.

Ordre de grandeur

Cette dernière expression permet de calculer un ordre de grandeur du taux d'émission spontanée d'un atome dans le vide. Prenons comme exemple la transition $2p \rightarrow 1s$ de l'atome d'hydrogène. Les orbitales $1s$ et $2p$ ont des dépendances spatiales et angulaires de la forme :

$$\begin{aligned}\psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \frac{\exp(-r/a_0)}{r} \\ \psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{5/2} \exp(-r/2a_0) \cos \theta\end{aligned}$$

où $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ est le rayon de Bohr (m étant la masse de l'électron). On peut alors calculer l'intégrale donnant le moment dipolaire de transition, et en déduire le taux d'émission spontanée par la relation (18.17). Le calcul donne numériquement $A_{21} = 6.10^8 \text{ s}^{-1}$. La durée de vie radiative associée est $\tau_R = 1/A_{21} = 1,6.10^{-9} \text{ s}$.

18.3 Indice optique d'un gaz d'atomes

Nous allons établir l'expression de la polarisabilité d'un atome placé dans l'état fondamental. Nous verrons comment en déduire l'indice optique d'un gaz d'atomes identiques. Nous allons effectuer un calcul perturbatif d'ordre un, qui donnera un résultat valable lorsque la fréquence du laser exciteur n'est pas trop proche de la résonance atomique. Le calcul complet (non-perturbatif) utilisant les équations de Bloch optiques est détaillé dans Annexe C.

18.3.1 Vecteur d'état

Nous effectuons le calcul dans le cas d'un atome présentant un ensemble de transitions dipolaires électriques, excité par un laser extérieur polarisé rectilignement dans la direction (Oz) , de champ électrique $E_0 \mathbf{u}_z \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Le hamiltonien s'écrit $H(t) = H_0 + W(t)$, où $W(t)$ est une perturbation sinusoidale de fréquence ω . On note comme auparavant les éléments de matrice de $W(t)$ sous la forme $W_{fj}(t) = W_{fj} \cos(\omega t)$, avec $W_{fj} = \langle \phi_f | e\mathbf{r} | \phi_j \rangle \cdot E_0 \mathbf{u}_z$.

L'atome étant initialement dans l'état fondamental (noté 0), le vecteur d'état à l'instant t s'écrit (voir le méthode perturbative en annexe pour une démonstration) :

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= |\phi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} \left[\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \exp(i\omega_{n0}t') W_{n0}(t') dt' \right] \exp(-i\omega_{n0}t/\hbar) |\phi_n\rangle \\ &= |\phi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} \left[\frac{W_{n0}}{i\hbar} \int_0^t \exp(i\omega_{n0}t') \cos(\omega t') dt' \right] \exp(-i\omega_{n0}t/\hbar) |\phi_n\rangle \\ &= |\phi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} \frac{W_{n0}}{2i\hbar} \left[\frac{\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega_{n0}t)}{i(\omega_{n0} + \omega)} + \frac{\exp(-i\omega t) - \exp(-i\omega_{n0}t)}{i(\omega_{n0} - \omega)} \right] |\phi_n\rangle\end{aligned}\tag{18.18}$$

18.3.2 Moment dipolaire moyen

Le moment dipolaire moyen dans l'état $|\psi\rangle$ est donné par $\langle \mathbf{D} \rangle_\psi = \langle \psi(t) | \mathbf{D} | \psi(t) \rangle$. Afin de déterminer la polarisabilité linéaire, on va se limiter aux termes linéaires par rapport au champ électrique exciteur. De plus, les termes dans (18.18) oscillant en $\exp(\pm i\omega_{n0}t)$, correspondant au mouvement propre de l'électron, s'amortissent (par décroissance spontanée de la population des niveaux excités). Pour obtenir la réponse en régime stationnaire, on ne garde que les termes en $\exp(\pm i\omega t)$. Le champ exciteur étant polarisé selon (Oz) , on calcule la composante selon (Oz) du moment dipolaire induit. On obtient :

$$\langle D_z \rangle_\psi = \sum_{n \neq 0} \frac{2\omega_{n0} |\langle \phi_n | eZ | \phi_0 \rangle|^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \frac{E_0 \cos(\omega t)}{\hbar} \quad (18.19)$$

où Z est l'opérateur position de l'électron le long de l'axe (Oz) .

18.3.3 Polarisation atomique

Par définition de la polarisabilité $\alpha(\omega)$, le moment dipolaire moyen s'écrit $\langle D_z \rangle_\psi = \alpha(\omega) \epsilon_0 E_0 \cos(\omega t)$. On obtient donc à partir de (18.19) :

$$\alpha(\omega) = \frac{2}{\epsilon_0 \hbar} \sum_{n \neq 0} \frac{\omega_{n0} |\langle \phi_n | eZ | \phi_0 \rangle|^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \quad (18.20)$$

Cette expression donne la polarisabilité d'un atome dans l'état fondamental. On remarque que la polarisabilité met en jeu tous les niveaux atomiques pour lesquels l'élément de matrice de couplage est non nul. On rappelle que cette expression est valable lorsque ω ne coïncide pas avec une des résonances atomiques (pour un calcul non perturbatif, voir l'Annexe C).

Il est frappant de remarquer que dans cette expression issue de l'approche quantique, chaque terme de la somme a une forme similaire à l'expression obtenue dans le modèle classique de l'électron élastiquement lié (voir l'Eq. 16.3 du chapitre 16) ² :

$$\alpha_{cl}(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (18.21)$$

Afin d'écrire la polarisabilité quantique sous une forme similaire au résultat classique, on introduit la notion de *force d'oscillateur* f_{n0} de la transition $0 \rightarrow n$ qui est très utilisée en spectroscopie :

$$f_{n0} = \frac{2m\omega_{n0}}{e^2\hbar} |\langle \phi_n | D_z | \phi_0 \rangle|^2 \quad (18.22)$$

La polarisabilité quantique s'exprime donc simplement sous la forme :

$$\alpha(\omega) = \sum_{n \neq 0} f_{n0} \frac{e^2}{m\epsilon_0 (\omega_{n0}^2 - \omega^2)} \quad (18.23)$$

²L'absence du terme d'amortissement proportionnel à Γ provient de l'utilisation de la méthode des perturbations, mais il apparaît naturellement dans l'approche quantique complète (voir Annexe C).

Cette expression montre que l'atome se comporte comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques classiques, dont les fréquences de résonance sont les fréquences de Bohr des transitions quantiques. Les forces d'oscillateurs f_{n0} sont les poids relatifs de chacun des oscillateurs, et ne peuvent être calculées que par la théorie quantique.

18.3.4 Constante diélectrique d'un gaz d'atomes

Pour un gaz dilué, chaque atome perçoit le champ extérieur (le champ diffusé par les autres atomes est négligeable devant le champ extérieur). La densité de polarisation est donc :

$$\mathbf{P} = \rho \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_{ext} = \epsilon_0 [\epsilon(\omega) - 1] \mathbf{E}_{ext} \quad (18.24)$$

où ρ est la densité du gaz (nombre d'atomes par unité de volume) et \mathbf{E}_{ext} le champ extérieur (champ incident sur le gaz). On a donc $\epsilon(\omega) = 1 + \rho \alpha(\omega)$, d'où :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2\rho}{\epsilon_0 \hbar} \sum_{n \neq 0} \frac{\omega_{n0} |\langle \phi_n | eZ | \phi_0 \rangle|^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} = 1 + \rho \sum_{n \neq 0} f_{n0} \frac{e^2}{m \epsilon_0 (\omega_{n0}^2 - \omega^2)} \quad (18.25)$$

L'indice optique est alors $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$. Notons pour finir que la somme dans l'Eq. (18.25) n'est autre que la susceptibilité linéaire $\chi(\omega) = \epsilon(\omega) - 1$, introduite au chapitre 16 dans le cas classique, et exprimée ici dans le cas quantique en utilisant les forces d'oscillateur.

Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris, 1997), Tome 2, chapitre XIII, complément A.
- [2] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, 2000), 3ème édition, chapitre 2.
- [3] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique* (Ellipses, Paris, 1997), chapitre II.

Chapitre 19

Lasers

Objectifs

- Introduire le principe des lasers (milieu amplificateur, gain, conditions d'oscillation)
- Décrire les différents modes de fonctionnement (continus et impulsionnels)
- Présenter quelques exemples de lasers.

19.1 Milieu amplificateur

19.1.1 Gain. Inversion de population

On s'intéresse à deux niveaux d'un système quantique (atome, molécule, électron dans un puits quantique...) notés 1 (niveau excité) et 0 (niveau fondamental). La puissance radiative émise par un élément de volume dV d'un milieu formé d'un ensemble de tels systèmes, à la pulsation ω , et dans la direction de l'axe (Oz), s'écrit :

$$dP(z, \omega) = \left[\frac{A_{10} N_1}{4\pi} + (B_{10} N_1 - B_{01} N_0) \frac{I(z, \omega)}{c} \right] \hbar \omega F(\omega) d\omega dV \quad (19.1)$$

où A_{ij} et B_{ij} sont les coefficients d'Einstein, avec N_0 et N_1 les populations des niveaux 0 et 1 (nombre de systèmes quantiques par unité de volume). On a noté $I(z, \omega)$ l'intensité par unité de fréquence ($\text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}$) émise dans la direction (Oz) et $F(\omega)$ le profil de raie. Ce profil permet de tenir compte de l'élargissement de la raie de transition (largeur naturelle, élargissement collisionnel, élargissement Doppler...). Selon le type d'élargissement, $F(\omega)$ peut être une Lorentzienne, une Gaussienne, ou encore une convolution de ces différents profils. La fonction $F(\omega)$ est normalisée de telle sorte que $\int F(\omega) d\omega = 1$, et $F(\omega) d\omega$ s'interprète comme la fraction de l'émission (ou de l'absorption) qui a lieu dans la bande $[\omega, \omega + d\omega]$. La direction (Oz) est à comprendre comme la direction de l'axe de la cavité laser dans laquelle est introduit le milieu amplificateur, comme nous allons le voir dans la suite. En notant $d\Sigma$ l'élément de surface normal à (Oz), tel que $dV = d\Sigma dz$, le bilan d'énergie radiative sur le volume dV s'écrit :

$$I(z + dz, \omega) d\Sigma d\omega - I(z, \omega) d\Sigma d\omega = dP(z, \omega) \quad (19.2)$$

ce qui donne en utilisant (19.1)

$$\frac{dI}{dz}(z, \omega) = A_{10} \frac{N_1}{4\pi} \hbar\omega F(\omega) + (B_{10} N_1 - B_{01} N_0) \frac{I(z, \omega)}{c} \hbar\omega F(\omega) \quad (19.3)$$

On a finalement une équation de bilan de la forme :

$$\frac{dI}{dz}(z, \omega) = \eta(\omega) + g(\omega) I(z, \omega) \quad (19.4)$$

Le premier terme du membre de droite est dû à l'émission spontanée. Le second terme décrit le gain net produit par le milieu (qui résulte de la différence entre l'émission stimulée et l'absorption) :

$$g(\omega) = \frac{\hbar\omega F(\omega)}{c} (B_{10} N_1 - B_{01} N_0) \quad (19.5)$$

On a amplification si $g(\omega) > 0$, c'est-à-dire si $B_{10} N_1 > B_{01} N_0$. Pour deux niveaux non dégénérés cette condition s'écrit :

$$N_1 > N_0 \quad (19.6)$$

C'est la condition d'*inversion de population*.

19.1.2 Gain d'un système à trois niveaux

Pour un système ne comportant que deux niveaux, on ne peut pas réaliser d'inversion de population (pour des niveaux non dégénérés, on a au mieux $N_1 = N_0$ à saturation). Examinons le cas d'un système à trois niveaux, supposés non dégénérés (voir figure 19.1).

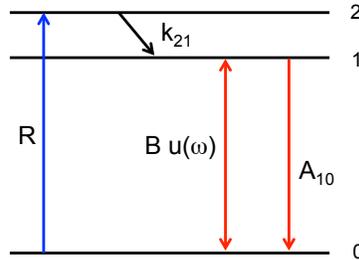


Figure 19.1: Modèle de système à trois niveaux. On note R le taux de pompage du niveau fondamental 0 vers le niveau 2 (sans préciser le mode de pompage) et k_{21} la constante cinétique de la transition 2-1 supposée non radiative. L'émission et l'absorption de lumière se font via la transition 1-0 avec les coefficients d'Einstein A_{10} (émission spontanée) et $B = B_{10} = B_{01}$ (émission stimulée et absorption).

Les équations de bilan pour les populations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= R N_0 - k_{21} N_2 \\ \frac{dN_1}{dt} &= k_{21} N_2 - A_{10} N_1 - (N_1 - N_0) B u(\omega) \end{aligned}$$

avec la condition $N_0 + N_1 + N_2 = N$, où N est le nombre de systèmes à trois niveaux composant le milieu amplificateur. On a noté $u(\omega) = I(z, \omega)/c$ la densité volumique d'énergie, par unité de fréquence. En régime stationnaire, on a :

$$\begin{aligned} R N_0 &= k_{21} N_2 \\ k_{21} N_2 - A_{10} N_1 - (N_1 - N_0) B u(\omega) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$N_1 = \frac{R + B u(\omega)}{A_{10} + B u(\omega)} N_0 \quad (19.7)$$

Cette relation montre que pour avoir $N_1 > N_0$ il faut $R > A_{10}$. La différence $N_1 - N_0$ (souvent appelée "inversion de population") s'écrit

$$N_1 - N_0 = \frac{R - A_{10}}{A_{10} + B u(\omega)} N \quad (19.8)$$

où l'on a supposé $N_0 \simeq N$ dans le membre de droite car seule une faible fraction des émetteurs du milieu à gain sont excités.

En présence de gain, l'émission spontanée est très vite négligeable et l'équation d'évolution de l'intensité directionnelle devient :

$$\frac{dI}{dz}(z, \omega) = g(\omega) I(z, \omega) \quad (19.9)$$

avec le gain $g(\omega)$ dont l'expression se déduit des Eqs. (19.5) et (19.8). Le gain dépend de l'intensité et se met sous la forme

$$g(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{1 + I(z, \omega)/I^{sat}} \quad (19.10)$$

avec

$$\begin{aligned} g_0(\omega) &= \sigma_a(\omega) (R/A_{10} - 1) N \\ I^{sat} &= c A_{10}/B \end{aligned}$$

Dans l'expression de $g_0(\omega)$ (appelé gain "non saturé") on a introduit la section efficace d'absorption de la transition 0-1 définie par $\sigma_a(\omega) = B F(\omega) \hbar \omega / c$ (unité m^2). Comme le gain $g(\omega)$ dépend de l'intensité, on a un comportement non linéaire qui fait apparaître deux régimes distincts :

- Pour $I(z, \omega) \ll I^{sat}$, l'intensité émise croît exponentiellement avec la longueur parcourue dans le milieu amplificateur ;
- Pour $I(z, \omega) \geq I^{sat}$, on observe une saturation du gain, avec une croissance linéaire de l'intensité lorsque $I(z, \omega) \gg I^{sat}$.

19.1.3 De trois à quatre niveaux

Un système à trois niveaux n'est pas favorable pour l'inversion de population, car dès que l'émission démarre, le niveau fondamental se repeuple et l'inversion de population cesse. Un fonctionnement en régime continu n'est donc pas possible. Avec un système à quatre niveaux (voir figure 19.2), l'inversion de population est plus facile car si la transition 0-0' est très rapide, le niveau 0 est vide. Un fonctionnement en régime continu est alors possible.

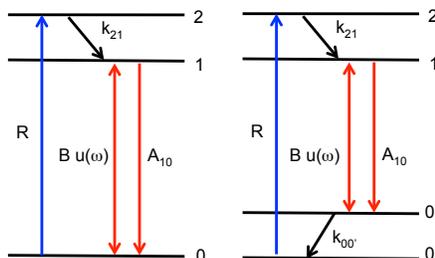


Figure 19.2: Comparaison entre un système à 3 niveaux (gauche) et à quatre niveaux (droite). La transition $0'-0$ est en général très rapide, ce qui permet un dépeuplement du niveau 0, facilitant l'inversion de population dans le système à quatre niveaux.

19.2 Cavité. Condition d'oscillation

Un amplificateur dont on réinjecte une partie de la sortie vers l'entrée peut se mettre à osciller. Le système se cale en général sur la fréquence donnant le gain maximum (ex : effet Larsen lorsqu'un microphone reçoit le signal d'un haut-parleur). En optique, le gain peut-être produit par un milieu amplificateur pompé. La rétroaction peut-être assurée par une cavité (ex : cavité Fabry-Pérot). Le système se met à osciller dès que le gain compense les pertes. On observe alors le *seuil laser* (LASER est l'acronyme de Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

19.2.1 Modes longitudinaux d'une cavité Fabry-Pérot

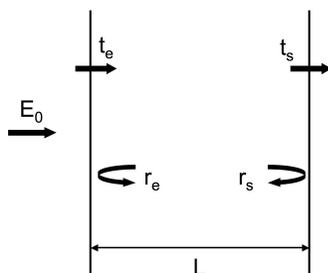


Figure 19.3: Coefficients mis en jeu dans le calcul du champ transmis par une cavité Fabry-Pérot.

Dans une cavité sans gain (dite cavité “froide”), le champ transmis s'écrit (on note E_0 le champ incident, et on utilise l'approximation scalaire) :

$$E = \frac{t_e t_s E_0}{1 - r_e r_s \exp(2ikL)} \quad (19.11)$$

avec $k = n\omega/c$, n étant l'indice du milieu dans la cavité. Les différents facteurs de réflexion et transmission de Fresnel sont définis sur la figure 19.3.

En présence de gain (hors saturation) et de pertes on a :

$$E = \frac{t_e t_s E_0}{1 - r_e r_s \exp[(g - \alpha)L] \exp(2ikL)} \quad (19.12)$$

Pour l'amplitude du champ, les termes $\exp(gL)$ et $\exp(-\alpha L)$ représentent, respectivement, l'amplification par le gain et l'atténuation par les pertes (autres que par transmission aux interfaces) sur un aller-retour dans la cavité. Notons que pour l'intensité, qui est le module au carré de l'amplitude, ces termes correspondent à l'amplification et l'atténuation sur la longueur L de la cavité.

19.2.2 Condition d'oscillation

L'amplificateur oscille lorsque sans champ excitateur, un champ émis apparaît. La condition est obtenue en annulant le dénominateur de l'Eq. (19.12), soit $r_e r_s \exp[(g - \alpha)L] \exp(2ikL) = 1$. On obtient une condition sur l'amplitude, et une sur la phase.

Condition sur l'amplitude : seuil laser

La condition sur l'amplitude donne :

$$\exp(gL) |r_e| |r_s| \exp(-\alpha L) = 1 \quad (19.13)$$

On peut réécrire cette condition différemment, en raisonnant sur les intensités (carré de l'amplitude). En notant $G = \exp(gL)$ le rapport des intensités entrantes et sortantes lors d'une traversée de la cavité (parfois appelé "gain en simple passage"), $1 - T = |r_e| |r_s|$ les pertes par transmission hors de la cavité et $1 - A = \exp(-\alpha L)$ les autres pertes (absorption, diffusion), la condition ci-dessus devient :

$$G(1 - T)(1 - A) = 1 \quad (19.14)$$

Le gain G qui apparaît ici est le gain saturé, qui dépend de l'intensité dans la cavité laser. Cette condition est celle qui en régime continu fixe le niveau d'intensité dans la cavité. Afin d'avoir une condition sur l'existence du seuil laser, on peut raisonner sur le gain non saturé $G_0 = \exp(g_0 L)$, qui est tel que $G \leq G_0$, et qui ne dépend que du milieu amplificateur. La condition à satisfaire pour que l'oscillation laser soit possible est donc

$$G_0(1 - T)(1 - A) \geq 1 \quad (19.15)$$

Cette condition exprime que le seuil laser est atteint lorsque le gain est suffisant pour compenser les pertes de la cavité.

Condition sur la phase : modes longitudinaux

La condition sur la phase donne :

$$\exp(2ikL) \exp(2i\phi) = 1 \quad (19.16)$$

où ϕ est le déphasage à la réflexion, ce qui donne $kL + \phi = p\pi$, où p est un entier. Dans le cas de parois réfléchissantes, on a $\phi = \pi$ et on obtient la condition suivante qui donne les positions en fréquence ω_p des modes de la cavité :

$$\omega_p = 2\pi p \frac{c}{2nL} \quad (19.17)$$

A partir de ces deux conditions, on peut dénombrer le nombre de modes longitudinaux pour lesquels l'oscillation laser va se produire (voir figure 19.4), et donc le nombre de modes longitudinaux du laser en fonctionnement. L'oscillation laser est possible pour toutes les fréquences

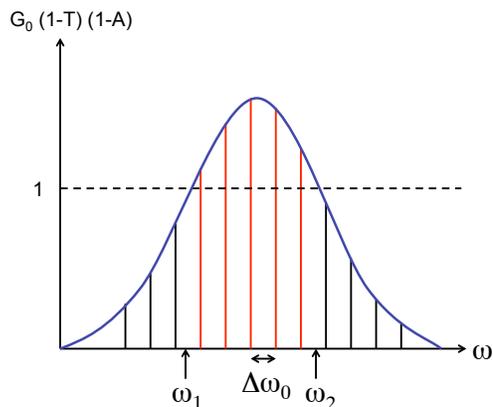


Figure 19.4: Courbe de gain et position en fréquence des modes longitudinaux. L'écart en fréquence entre deux modes longitudinaux est $\Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL)$. Les modes actifs sont ceux pour lesquels $G_0(1-T)(1-A) \geq 1$.

vérifiant $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Les modes du laser sont donc tous les modes longitudinaux de fréquences ω_p de la forme (19.17) et vérifiant $\omega_1 \leq \omega_p \leq \omega_2$.

Exemple

Pour le laser He-Ne, on a typiquement une longueur de cavité $L = 0,3$ m et une largeur de courbe de gain $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \simeq 10$ GHz. Puisque $2\pi c/(2L) \simeq 3$ GHz, on a donc typiquement 3 ou 4 modes actifs.

Comment l'oscillation démarre-t-elle ?

L'oscillation démarre à partir d'un "bruit", qui est dans le cas du laser l'émission spontanée (dans le cas de l'effet Larsen, il s'agit d'un bruit acoustique). Dès que quelques photons sont émis spontanément dans un mode actif de la cavité, ils sont amplifiés ce qui amorce l'instabilité (l'intensité du mode se met à croître exponentiellement, jusqu'à ce que le gain sature).

19.3 Modes de fonctionnement

19.3.1 Pompage

Différents types de pompage peuvent être utilisés pour porter les émetteurs dans leur niveau excité.

Pompage optique

Historiquement, c'est le pompage optique qui a été utilisé le premier (laser à rubis, 1960). Actuellement, il est utilisé pour les lasers YAG (lampe flash), ou pour les lasers à colorants (pompage par un autre laser).

Pompage électronique

On l'utilise beaucoup dans les lasers à gaz. Le pompage se fait par collisions entre des molécules excitées par une décharge électrique et les atomes (ou molécules) émetteurs (ex : laser He-Ne, le laser CO₂ et laser à Argon). Le pompage électronique est également utilisé pour les lasers solides à semiconducteurs (ex : diode laser, laser à cascade quantique).

Pompage chimique

Ce mode de pompage utilise une réaction chimique du type $H_2 + F_2 \rightarrow 2HF$ qui produit des molécules avec une inversion de population. Il est peu utilisé (car coûteux), mais permet de produire des lasers continus de forte puissance.

19.3.2 Un peu d'histoire : le laser à rubis

Le laser à rubis (voir figure 19.5) est le premier laser qui ait fonctionné dans le domaine optique (le Maser, fonctionnant dans le domaine micro-ondes, avait été produit auparavant). Il s'agit d'un laser utilisant un système à trois niveaux¹, pompé par un flash de lumière blanche d'une durée de l'ordre de la ms, et fonctionnant généralement en mode impulsif.

Le rubis (ions Cr³⁺ dans une matrice d'alumine - Al₂O₃ - appelée parfois saphir blanc lorsqu'elle n'est pas dopée) a quelques qualités remarquables :

- Deux grosses bandes très larges couvrant tout le visible et capable d'absorber efficacement la lumière blanche d'un flash (voir le diagramme des niveaux d'énergie de la figure 19.5) ;
- Les états excités correspondant à ces bandes perdent très vite leur énergie potentielle (en quelques ps) au profit d'un état radiatif métastable de durée de vie longue (~ 3 ms).
- La transition radiative est très fine car l'ion Cr³⁺ a sensiblement le même rayon ionique que Al³⁺ et s'insère donc très bien dans la matrice d'alumine, sans distorsion de la maille qui créerait un élargissement inhomogène ;
- Le rendement quantique est également très élevé (ce qui signifie qu'un photon absorbé a une grande probabilité de donner un photon émis). Cependant, l'excédent d'énergie entre le photon absorbé et le photon émis est dissipé sous forme de chaleur par des transitions non radiatives, chaleur qu'il faut évacuer.

¹Bien que l'inversion de population, et donc le gain, soit obtenue plus efficacement avec un système à quatre niveaux, historiquement c'est un système à trois niveaux qui a donné le premier laser.

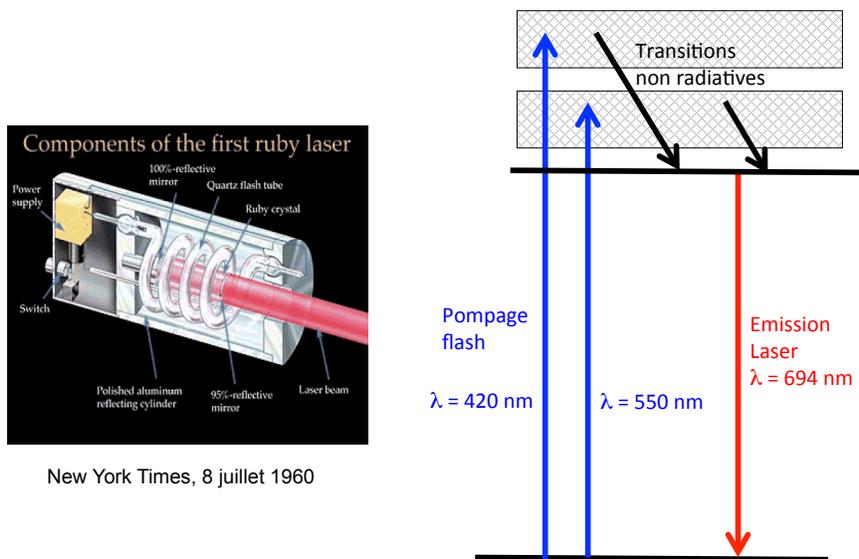


Figure 19.5: Schéma de principe et diagramme des niveaux énergétiques mis en jeu dans le laser à rubis.

Dans la suite, nous discutons des différents modes de fonctionnement des lasers, en s'appuyant sur l'exemple du laser à rubis (cependant ces modes de fonctionnement s'appliquent à l'ensemble des lasers).

19.3.3 Fonctionnement en régime relaxé

C'est le mode du laser à rubis historique. Le fonctionnement peut-être compris par une analogie hydraulique. C'est le régime que l'on peut observer lorsqu'on cherche à remplir un réservoir d'eau avec une pompe qui possède à la fois des fuites et un trop plein de type siphon. Le rôle de la pompe est tenue par le flash, les fuites représentent l'émission spontanée et le siphon représente l'émission laser. Dans l'analogie hydraulique on observe une mise en route périodique du siphon et donc la baisse rapide du niveau associé du réservoir. Ici l'émission laser va avoir tendance à vider le niveau radiatif excité de sa population et à diminuer le gain du système qui n'oscillera plus jusqu'à ce que le pompage rétablisse le gain, etc. Pendant la durée du flash, soit environ 1 ms, on observera une suite un peu erratique d'impulsions (due au caractère aléatoire de l'émission spontanée) de largeur typique $0,1 \mu\text{s}$ séparés d'environ $1 \mu\text{s}$ (voir figure 19.6). Le rendement d'un tel laser est assez mauvais, on stocke environ 2 000 J d'énergie électrique dans les capacités d'alimentation du flash (il faut près d'un m^3 de capacités !) pour récupérer 10 J d'énergie dans l'impulsion optique. De plus cette impulsion dure 1 ms et la puissance crête (mal contrôlée) est de l'ordre de quelques dizaines de W ce qui est insuffisant pour beaucoup d'applications (effets non linéaires, perçage, etc). Pour palier cet inconvénient on change de régime de fonctionnement.

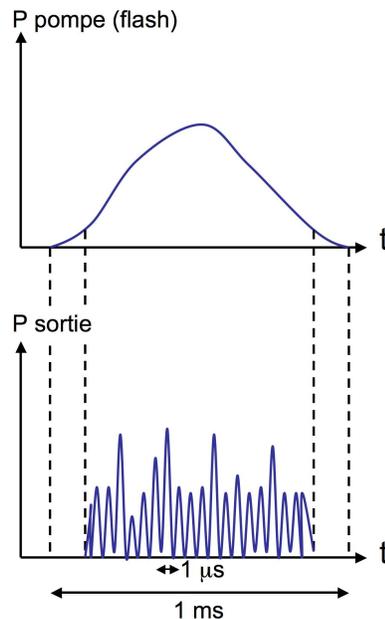
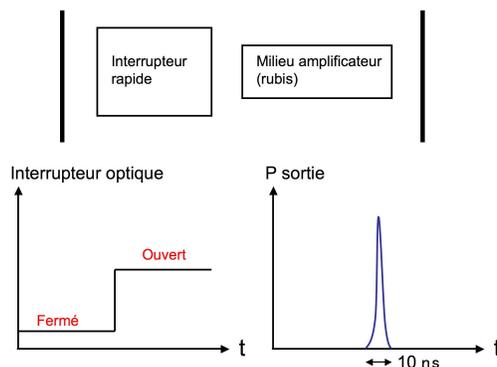


Figure 19.6: Illustration du fonctionnement du laser en régime relaxé.

19.3.4 Régime déclenché (*Q-switched*)

Revenons à l'analogie hydraulique : il suffit de bloquer le siphon pour voir l'eau s'accumuler dans le réservoir et de l'ouvrir brusquement pour avoir un écoulement violent. Dans ce mode, on bloque donc l'émission pendant la durée de l'impulsion pompe. On obtient ensuite une impulsion émise géante. Le fonctionnement repose sur l'utilisation d'un "interrupteur optique" (voir figure 19.7). On utilise pour cela une cellule à effet Pockels ou un absorbeur saturable. Pour le laser à rubis, le passage à ce mode de fonctionnement permet de créer des impulsions de 10 ns, et contenant une énergie de quelques Joules. On obtient alors une puissance crête de l'ordre de 10^9 W, capable d'engendrer les très nombreux effets non linéaire inaccessibles en mode relaxé.

Figure 19.7: Illustration du fonctionnement du laser en régime déclenché (*Q-switched*).

19.3.5 Régime à modes synchronisés (ou modes bloqués en phase)

Sous la courbe de gain, on a vu que l'on peut avoir plusieurs modes longitudinaux. Dans le cas du laser à rubis, la largeur en fréquence de la courbe de gain est $\Delta\omega \simeq 20.10^9$ Hz (ce qui correspond à $\Delta\sigma \simeq 0,1 \text{ cm}^{-1}$). L'intervalle entre deux modes longitudinaux est $\Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL) \simeq 3,8.10^9$ Hz pour une cavité de 25 cm. On a donc 5 modes actifs. Ces modes se déclenchent indépendamment, et donc avec des phases aléatoires les uns par rapport aux autres.

Modes avec phases aléatoires

Si les N modes ont des phases relatives totalement décorréliées, le champ électrique résultant est de la forme :

$$E(t) = \text{Re} \left[\sum_{m=0}^{N-1} E_0^m \exp(i\omega_m t) \exp(i\phi_m) \right] \quad (19.18)$$

où $\omega_m = \omega_0 + m \Delta\omega_0$, avec $\Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL)$ et les ϕ_m sont des termes de phases aléatoires. En supposant pour simplifier que les amplitudes sont les mêmes pour tous les modes, l'intensité (moyennée sur un temps long devant la période des oscillations aux fréquences optiques) s'écrit :

$$\begin{aligned} I(t) &= \left| \sum_{m=0}^{N-1} E_0 \exp(i\omega_m t + \phi_m) \right|^2 \\ &= N E_0^2 + 2E_0^2 \sum_{p>m} \cos[(\omega_p - \omega_m)t + \phi_p - \phi_m] \end{aligned} \quad (19.19)$$

L'intensité est de la forme $I(t) = \bar{I} + \Delta I$, où l'intensité moyenne est $\bar{I} = N E_0^2$ et où l'amplitude des fluctuations est $\Delta I \sim \bar{I}$ lorsque $N \gg 1$. C'est un comportement chaotique classique que l'on rencontre souvent lorsque l'on superpose des signaux ondulatoires avec des phases aléatoires (ex : fluctuations d'intensité dans un speckle, voir par exemple [4]).

Modes avec phases corrélées

Les modes sont dits "synchronisés en phase" lorsque $\phi_m = \phi$ pour tout m , où ϕ est une constante. Dans ce cas, l'intensité résultant de la superposition de N modes s'écrit :

$$\begin{aligned} I(t) &= \left| \sum_{m=0}^{N-1} E_0 \exp(i\omega_m t) \exp(i\phi) \right|^2 \\ &= |E_0|^2 \left| \sum_{m=0}^{N-1} \exp(i\omega_m t) \exp(i\phi) \right|^2 \\ &= |E_0|^2 \left| \frac{1 - \exp(i N \Delta\omega_0 t)}{1 - \exp(i\Delta\omega_0 t)} \right|^2 \\ &= |E_0|^2 \left| \frac{\sin(N \Delta\omega_0 t/2)}{\sin(\Delta\omega_0 t/2)} \right|^2 \end{aligned}$$

On a donc en sortie du laser une suite d'impulsions lumineuses, réparties périodiquement avec une période $T = 2\pi/\Delta\omega_0 = 2nL/c$ (correspondant au temps d'aller-retour dans la cavité), et de durée $\tau = T/N$ (voir figure 19.8).

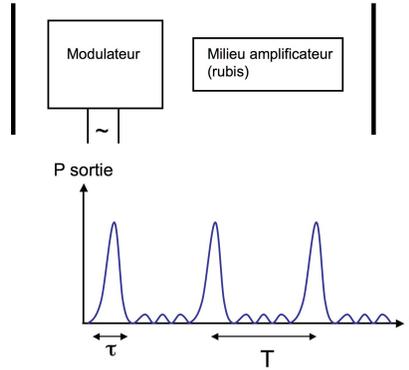


Figure 19.8: Allure temporelle de l'intensité en sortie du laser avec des modes synchronisés en phase.

Donnons un ordre de grandeur de la durée des impulsions dans le cas du laser $\text{Ti}/\text{Al}_2\text{O}_3$ (saphir dopé au titane). Pour une cavité de 1 m, on a $\Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL) \simeq 10^9$ Hz. La courbe de gain a une largeur $\Delta\omega \simeq 2\pi \times 50.10^{12}$ Hz. On a donc de l'ordre de $N = 5.10^4$ modes, et une durée d'impulsions de l'ordre de $\tau = T/N \simeq 10^{-13}$ s = 100 fs.

Comment synchroniser les modes ?

En pratique, la synchronisation en phase s'obtient en modulant l'amplitude des modes (en utilisant un modulateur électro-optique ou acousto-optique). Considérons un mode particulier, que nous indiquerons par k . Son champ électrique modulé en amplitude est de la forme :

$$E(t) = E_0 [1 + m \cos(\Delta t)] \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (19.20)$$

Si l'on module à la pulsation $\Delta = \Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL)$, on peut réécrire le champ sous la forme :

$$E(t) = E_0 \left[\cos(\omega_k t + \phi_k) + \frac{m}{2} \cos[(\omega_k + \Delta)t + \phi_k] + \frac{m}{2} \cos[(\omega_k - \Delta)t + \phi_k] \right] \quad (19.21)$$

On crée ainsi des composantes oscillant aux fréquences des modes voisins d'indice $k-1$ et $k+1$. Si le mode k est amplifié et contribue à l'émission du laser, il va induire des oscillations forcées des modes voisins qui auront la même phase ϕ_k . On va donc ainsi "verrouiller" en phase les modes $k-1$ et $k+1$ avec le mode k . Par extension de proche en proche, tous les modes contribuant à l'émission du laser vont se synchroniser en phase.

19.3.6 Fonctionnement monomode

De très nombreuses applications comme l'holographie ou l'interférométrie sur de grandes distances requièrent un laser avec une très grande cohérence temporelle (nous n'évoquerons que

brèvement ci-dessous les structures latérales des modes, dits modes transverses, qui confèrent au faisceau sa structure spatiale latérale).

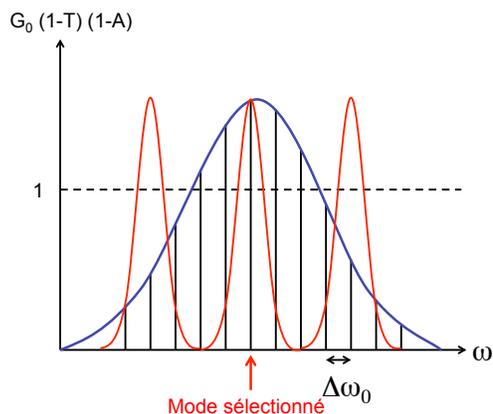


Figure 19.9: Principe de sélection d'un mode longitudinal à l'aide d'un interféromètre de Fabry-Pérot intra-cavité.

Sélection d'un mode longitudinal

Nous avons vu que dans la courbe de gain de largeur $\Delta\omega$ on avait N modes séparés de $\Delta\omega_0 = 2\pi c/(2nL)$. Si on veut affiner la distribution spectrale, afin d'augmenter la cohérence temporelle, il faut isoler un mode, c'est-à-dire empêcher les autres modes d'osciller. On place pour cela un (ou plusieurs) interféromètres dans la cavité centré(s) sur le mode à sélectionner, pour lequel on aura une transmission $T = 1$ (voir figure 19.9). Les modes voisins doivent être amortis pour que les pertes soient supérieures au gain. Il faut également que l'intervalle spectral entre les maxima de transmission soit supérieur à $\Delta\omega$.

19.4 Modes transverses d'une cavité

En plus des conditions d'oscillation laser discutées à la section 19.2.2, il est nécessaire d'avoir conservation de la distribution transverse du champ (c'est-à-dire dans les directions perpendiculaires à la direction de propagation). Une distribution spatiale transverse du champ qui se reproduit identique à elle-même après un aller-retour dans la cavité définit un mode transverse du laser.

Les miroirs formant la cavité étant de taille limitée, les modes propres de la cavité ont une extension transverse finie. Ceci impose une divergence du mode du fait de la diffraction. Il faut donc s'opposer à cette divergence pour obtenir un mode transverse qui soit identique à lui-même après un aller-retour dans la cavité. Une solution simple est d'utiliser un ou plusieurs miroirs concaves, qui jouent le rôle de lentilles sans introduire de pertes supplémentaires. Le cas le plus simple est celui d'une cavité formée d'un miroir concave et d'un miroir plan, comme sur la figure 19.10

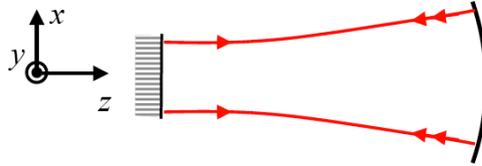


Figure 19.10: Cavité stable utilisant un miroir concave permettant de compenser les pertes par diffraction.

La forme de la cavité définit la structure spatiale des modes transverse. Ces modes sont les solutions de l'équation de Helmholtz vérifiant les conditions aux limites sur les miroirs de la cavité. Ils sont de la forme :

$$E(x, y, z, t) = \text{Re}[A(x, y, z) \exp(-i\omega_p t)] \quad (19.22)$$

où les ω_p sont les fréquences des modes longitudinaux telles que $\omega_p = 2\pi p c / (2nL)$, avec p entier, n indice optique et L longueur de la cavité. Dans le cas de la cavité de la Fig. 19.10, ces modes

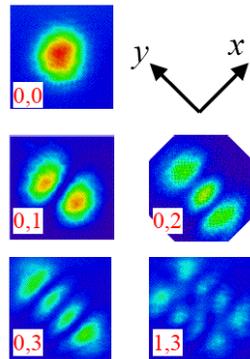


Figure 19.11: Allure des modes transverse d'une cavité pour différents indices (l, m) . On représente l'intensité du mode dans le plan (Ox, Oy) normal à l'axe de la cavité. Le mode $(0, 0)$ correspond au faisceau gaussien.

sont appelés modes de Hermite-Gauss, et leurs amplitudes complexes ont pour expression :

$$A_{l,m} = \exp[-(x^2 + y^2)/w^2(z)] H_l[\sqrt{2}x/w(z)] H_m[\sqrt{2}y/w(z)] \quad (19.23)$$

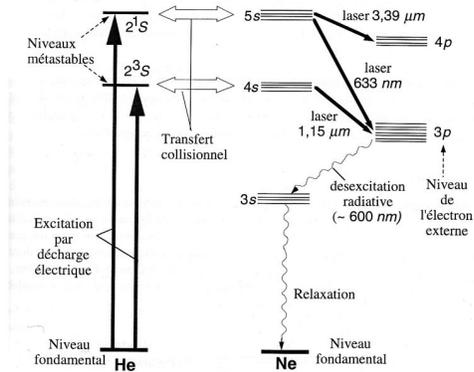
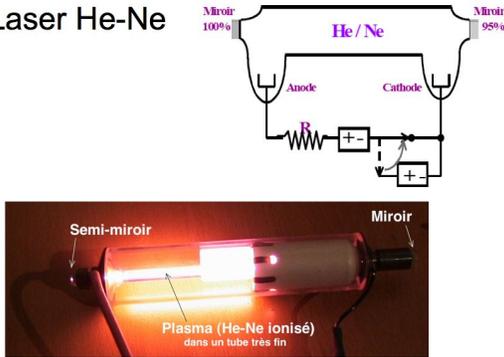
où H_m est le polynôme d'Hermite d'ordre m , et $w(z)$ est le beam-waist. Les premiers polynômes d'Hermite sont $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$. Les indices l et m indiquent le nombre de noeuds du mode transverse dans le plan (Ox, Oy) . La structure des modes est d'autant plus complexe que l et m sont grands, comme illustré sur la Fig. 19.11.

19.5 Exemples de lasers

Exemples (1)

Remarque : souvent des systèmes à 4 niveaux

Laser He-Ne



Laser CO₂

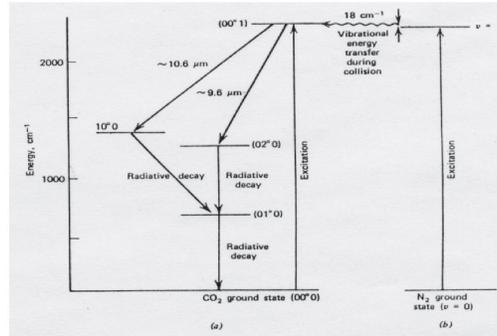
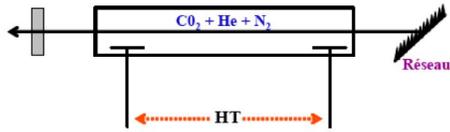
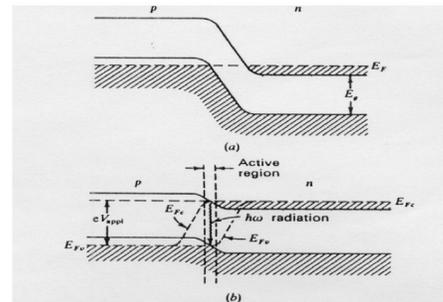
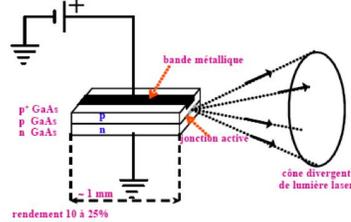


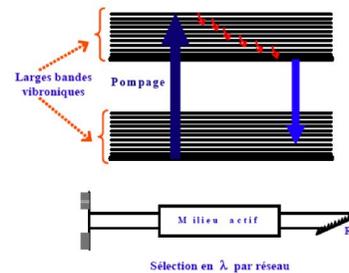
Figure 19.12: Schéma de principe et diagramme des niveaux énergétiques mis en jeu dans le laser He-Ne et le laser CO₂, qui sont deux lasers à gaz très répandus.

Exemples (2)

Diode Laser (semiconducteurs)



Lasers accordables
colorants (UV à proche IR)



Ti : saphir (Ti^{3+} dans Al_2O_3), proche IR

Lasers Nd:YAG

Nd^{3+} dans un cristal YAG (Yttrium-Aluminum-Garnett)

Figure 19.13: Schéma de principe et/ou diagramme des niveaux énergétiques mis en jeu dans les diodes laser, les lasers à colorants et deux lasers impulsions courants.

19.6 Applications : pourquoi le laser ?

Vis-à-vis des applications, le laser est un “concentrateur de lumière”. Il permet de concentrer l'énergie lumineuse sous différents aspects :

- Concentrer l'énergie dans l'espace (focalisation à la limite de diffraction).
- Concentrer l'énergie en direction (directivité due à une grande cohérence spatiale) ;
- Concentrer l'énergie dans le spectre (cohérence temporelle) ;
- Concentrer l'énergie dans le temps (impulsions ultracourtes). Les lasers femtoseconde (10^{-15} s) sont commercialisés, les lasers attoseconde (10^{-18} s) sont des outils de laboratoire utilisés dans divers domaines de recherche (hautes énergies, dynamique électronique dans les atomes et molécules).

Ces propriétés sont utiles dans de nombreux domaines, parmi lesquels :

- Le traitement des matériaux (traitement thermique de surface, découpe...) ;
- Les applications médicales et biologiques (lasers chirurgicaux, imagerie haute résolution comme la microscopie confocale, pinces optiques) ;
- La métrologie (mesure de distances, gyromètres...) ;
- Les télécommunications (transmission par fibres optiques, cryptographie quantique) ;
- Les applications militaires (guidage, télédétection...) ;
- La recherche (imagerie, spectroscopie, atomes froids, optique quantique, physique des hautes énergies...).

Références

- [1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, 2000), 3ème édition, chapitre 2.
- [2] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique* (Ellipses, Paris, 1997), chapitre II.
- [3] E. Rosencher, B. Vinter, *Optoélectronique* (Dunod, Paris, 2002), chapitre 4.
- [4] J.W. Goodman, *Statistical Optics* (Wiley, New York, 1985), chapitre 2.

Annexe A

Fonction de corrélation du champ à deux fréquences

Dans cette annexe nous utilisons l'approche statistique de la cohérence introduite au chapitre 1 pour calculer la fonction de corrélation du champ à deux fréquences différentes ω et ω' . Le résultat permet en particulier de comprendre pourquoi dans une lumière statistiquement stationnaire, deux fréquences différentes ne donnent pas lieu à des interférences (on dit souvent que deux fréquences différentes n'interfèrent pas).

Calculons la fonction de corrélation $\langle E^*(\omega)E(\omega') \rangle$ et montrons qu'elle est non nulle uniquement lorsque $\omega = \omega'$. On utilise la fonction tronquée $E_T(t)$ introduite au chapitre 1 pour définir le spectre $E_T(\omega)$ du champ. La fonction de corrélation à deux fréquences s'écrit :

$$\langle E_T^*(\omega)E_T(\omega') \rangle = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E_T^*(t)E_T(t') \rangle \exp(-i\omega t + i\omega' t') dt dt' \quad (\text{A.1})$$

En introduisant le changement de variable $t' = t + \tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle E_T^*(\omega)E_T(\omega') \rangle &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E_T^*(t)E_T(t + \tau) \rangle \exp[-i(\omega - \omega')t] \exp(i\omega'\tau) dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E_T^*(t)E_T(t + \tau) \rangle \exp(i\omega'\tau) d\tau \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega - \omega')t] dt \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dans la dernière ligne, on a utilisé le fait que $\langle E_T^*(t)E_T(t + \tau) \rangle$ ne dépend que de τ (stationnarité statistique). Le dernier terme du membre de droite s'écrit $2\pi \delta(\omega - \omega')$, où $\delta(\dots)$ est la distribution de Dirac. Le premier terme du membre de droite n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (à la limite $T \rightarrow \infty$), qui est donc la densité spectrale de puissance $\phi(\omega')$. On a finalement ¹ :

$$\langle E^*(\omega)E(\omega') \rangle = 2\pi \phi(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad (\text{A.3})$$

relation à comprendre au sens des distributions, mais qui traduit bien physiquement le fait que deux fréquences distinctes n'interfèrent pas dans un signal statistiquement stationnaire.

¹Notons que la distribution $\phi(\omega')\delta(\omega - \omega')$ est identique à la distribution $\phi(\omega)\delta(\omega - \omega')$.

Annexe B

Démonstration de l'équation des rayons lumineux

Dans cette annexe nous démontrons l'équation des rayons lumineux qui a été vu au chapitre 3. Ecrivons les champ électrique et magnétique sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r}) - i\omega t)] \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r}) - i\omega t)] \quad (\text{B.2})$$

avec $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Cette forme est générale pour un champ monochromatique.

On considère un milieu diélectrique *non absorbant* et non magnétique, décrit par son indice de réfraction $n(\mathbf{r})$. Les équations de Maxwell s'écrivent (ceci sera revu en détail dans le cours "Lumière et Matière") :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= 0 & \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 & \text{rot } \mathbf{H} &= -i\omega \mathbf{D} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec $\mathbf{D} = \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. En utilisant les formes des champs ci-dessus, nous allons réécrire les équations de Maxwell à la limite des courtes longueurs d'onde (limite de l'optique géométrique), c'est-à-dire $\lambda \rightarrow 0$ ou $k_0 \rightarrow +\infty$. Pour cela, on utilise

$$\begin{aligned} \text{rot} [\mathbf{E} \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] &= \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) [\text{rot } \mathbf{E} + ik_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}] \\ &\simeq \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) ik_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \times \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

et

$$\begin{aligned} \text{div} [\epsilon_0 n^2 \mathbf{E} \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] &= \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) [\epsilon_0 \text{div}(n^2 \mathbf{E}) + \epsilon_0 n^2 ik_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}] \\ &\simeq \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) \epsilon_0 n^2 ik_0 \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Les équations de Maxwell s'expriment donc dans cette limite sous la forme simplifiée :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E} &= 0 & \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \times \mathbf{E} &= c \mathbf{B} \\ \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} &= 0 & \mathbf{E} &= (-c/n^2) \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En éliminant \mathbf{B} , on obtient l'équation dite de l'eikonale :

$$[\mathbf{grad} S(\mathbf{r})]^2 = n^2(\mathbf{r}) \quad (\text{B.7})$$

On définit ensuite les rayons lumineux comme les lignes de champ du vecteur de Poynting (lignes de flux lumineux). Le vecteur de Poynting, moyenné temporellement sur un grand nombre de périodes (grandeur habituellement considérée aux fréquences optiques), est donné par

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* / \mu_0) = \frac{1}{2c\mu_0} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \quad (\text{B.8})$$

Les rayons lumineux sont donc tangents à $\mathbf{grad} S(\mathbf{r})$. Définissons le vecteur unitaire le long d'un rayon lumineux $\mathbf{u} = \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) / |\mathbf{grad} S(\mathbf{r})|$. D'après l'eikonale (B.7), on a $\mathbf{grad} S(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\mathbf{u}$. Introduisons l'abscisse curviligne s le long d'un rayon lumineux (qui définit la trajectoire d'un rayon lumineux). On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[n(\mathbf{r})\mathbf{u}] &= \frac{d}{ds}[\mathbf{grad} S(\mathbf{r})] \\ &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \\ &= \left[\frac{\mathbf{grad} S(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{grad} \right] \mathbf{grad} S(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2n(\mathbf{r})} \mathbf{grad} [\mathbf{grad} S(\mathbf{r})]^2 \\ &= \frac{1}{2n(\mathbf{r})} \mathbf{grad} n^2(\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{grad} n(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

On a ainsi démontré l'équation des rayons lumineux (qui peut également se déduire du principe de Fermat) :

$$\frac{d}{ds}[n(\mathbf{r})\mathbf{u}] = \mathbf{grad} n(\mathbf{r}) \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

Démonstration de la loi de Planck

Nous établissons l'expression de la densité d'énergie par unité de fréquence $U_\omega^0(T)$ ($\text{J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}$), du rayonnement d'équilibre, dite loi de Planck (cette loi peut s'écrire également en termes de luminance, voir chapitre 4). Nous supposons connues les notions de base de physique statistique à l'équilibre (ensemble canonique, statistique quantique de Bose-Einstein).

On raisonne sur une cavité de volume V , à l'équilibre thermodynamique à la température T . On suppose l'intérieur de la cavité assimilable au vide (indice $n = 1$ à toutes les fréquences). Le rayonnement est considéré comme un "gaz de photons", qui sont des bosons, définis comme les excitations des modes optiques de la cavité. A l'équilibre, la densité d'énergie s'écrit comme le produit de trois termes :

$$U_\omega^0(T) = N(\omega) \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \hbar\omega \quad (\text{C.1})$$

Dans cette expressions, $N(\omega)$ est la densité de mode, définie de telle sorte que $N(\omega)d\omega$ soit le nombre de modes optiques de la cavité par unité de volume dans la bande de fréquences $[\omega, \omega + d\omega]$, le facteur $1/[\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]$ est le nombre moyen de photon dans chaque mode (statistique de Bose-Einstein) et $\hbar\omega$ l'énergie d'un photon. Il faut donc déterminer $N(\omega)$.

Pour une cavité de grande taille (par rapport aux longueurs d'ondes mises en jeu), on peut assimiler la cavité au vide et compter le nombre de vecteurs \mathbf{k} qui pointent dans un élément de volume d^3k de l'espace des vecteurs \mathbf{k} , correspondant à la bande de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$ (sachant que $k = \omega/c$). Pour cela, on considère que la cavité de volume V est un cube de côté L , avec des parois très réfléchissantes de telle sorte que le champ s'annule sur les parois (ces conditions aux limites strictes peuvent être remplacées par des conditions aux limites périodiques, voir par ex [1]). Raisonnons d'abord en géométrie 1D. Les solutions de l'équations d'onde qui s'annulent en $x = 0$ et en $x = L$ sont de la forme $\sin(k_x x)$ avec $k_x = p\pi/L$, $p \in \mathbb{N}^*$. Les vecteurs d'onde possibles sont donc positifs et séparés de π/L . Le nombre de valeur de k_x dans un intervalle dk donné est donc $dk L/\pi$. En généralisant à 3D, les vecteurs d'onde ayant leurs trois coordonnées positives et de module fixé à dk près pointent dans un volume $d^3k = 4\pi k^2 dk/8$. Leur nombre est $d^3k V/\pi^3$ ou encore $4\pi V k^2 dk/(8\pi^3)$. En tenant compte du fait que pour chaque vecteur \mathbf{k} il y a deux états de polarisation, le nombre de modes par unité de volume et par unité de fréquence (on utilise couramment l'appellation "densité de modes") est finalement donné par $N(\omega) = \omega^2/(\pi^2 c^3)$.

On a donc pour la densité d'énergie électromagnétique à l'équilibre thermique :

$$U_{\omega}^0(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (\text{C.2})$$

Références

[1] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique Statistique* (Hermann, Paris, 1997), chap. 6, p. 818.

Annexe D

Démonstration de la statistique du bruit de grenaille en photodétection (bruit de photons)

La théorie semi-classique de la photodétection est due à Mandel (1959) [1,2]. Nous suivons ici l'approche exposée dans [1].

On suppose le photodétecteur éclairé par une lumière classique d'intensité $I(t)$. L'hypothèse essentielle est que la conversion lumière-électrons (photoionisation) est supposée être un processus *discret* (ce point peut bien sûr se justifier par la théorie quantique). Plus précisément, on considère que la probabilité d'avoir *une* photoionisation (donc la création d'un photoélectron) entre les instants t et $t + dt$ est de la forme :

$$p(t) dt = \epsilon I(t) dt \quad (\text{D.1})$$

L'intervalle de temps dt est choisi assez petit pour que la probabilité d'avoir plus d'un événement de photoionisation pendant dt soit nulle (ce qui est possible avec un processus discret), mais assez grand pour que le calcul d'un taux de transition quantique ait un sens, calcul qui donne ϵ , que nous appellerons efficacité du détecteur (voir [2] pour le calcul détaillé de ϵ dont nous n'avons pas besoin ici). L'objectif est de calculer $P_m(\tau)$, définie comme la probabilité de détecter m photoélectrons sur un intervalle de temps τ .

Pour effectuer ce calcul, on introduit $P_m(t, \tau)$, probabilité de mesurer m photoélectrons entre t et $t + \tau$. Pour obtenir cette grandeur, on va raisonner de manière infinitésimale et obtenir une équation différentielle dont la solution donnera $P_m(t, \tau)$. Calculons $P_m(t, t' + dt')$, probabilité d'avoir m photoélectrons entre t et $t + t' + dt'$. Deux cas sont possibles, comme indiqué sur la figure D.1. Le premier processus donne une contribution $P_m(t, t')[1 - p(t + t') dt']$, et le second processus donne $P_{m-1}(t, t') p(t + t') dt'$ (on fait l'hypothèse que deux photoionisations successives sont des processus indépendants). La probabilité totale s'écrit donc :

$$P_m(t, t' + dt') = P_m(t, t') - P_m(t, t') p(t + t') dt' + P_{m-1}(t, t') p(t + t') dt' \quad (\text{D.2})$$

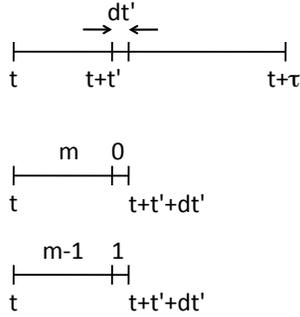


Figure D.1: Haut : intervalles de temps considérés pour la démonstration de la loi de Poisson. Bas : représentation des deux possibilités d'obtenir m photoélectrons entre t et $t + t' + dt'$.

On en déduit donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP_m}{dt'}(t, t') = \epsilon I(t, t') [P_{m-1}(t, t') - P_m(t, t')] \quad (\text{D.3})$$

On peut effectuer une résolution par récurrence. Il faut alors des conditions aux extrémités : $P_0(t, 0) = 1$ et $P_m(t, 0) = 0$ pour $m > 0$ (conditions que l'on peut interpréter facilement).

Pour $m = 0$, l'équation différentielle se simplifie en (un seul cas de la figure D.1 est possible) :

$$\frac{dP_0}{dt'}(t, t') = -\epsilon I(t, t') P_0(t, t') \quad (\text{D.4})$$

En intégrant entre $t' = 0$ et $t' = \tau$, on obtient :

$$P_0(t, \tau) = \exp[-\epsilon I(t, \tau) \tau] \quad (\text{D.5})$$

avec

$$I(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} I(t') dt' \quad (\text{D.6})$$

qui est l'intensité moyenne sur un intervalle de temps τ débutant au temps t .

Pour $m \geq 0$, on peut obtenir le résultat par récurrence :

$$P_m(t, \tau) = \frac{[\epsilon I(t, \tau) \tau]^m}{m!} \exp[-\epsilon I(t, \tau) \tau] \quad (\text{D.7})$$

Cette expression permet de prendre en compte une intensité incidente non stationnaire. Pour un signal stationnaire, l'intensité est indépendante de t , de telle sorte que $I(t, \tau) = I$. La quantité $\epsilon I \tau$ est alors directement le nombre de photoélectron moyen $\bar{m} = M$ détecté sur l'intervalle de temps τ . On a donc finalement :

$$P_m(\tau) = \frac{M^m}{m!} \exp(-M) \quad (\text{D.8})$$

On obtient la loi de Poisson caractéristique du bruit de grenaille (ou bruit de photons).

La calcul de la variance s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \overline{m^2} &= \sum_{m=0}^{+\infty} m^2 P_m(\tau) \\
 &= M^2 \exp(-M) \sum_{m=2}^{+\infty} m \frac{M^{m-2}}{(m-1)!} \\
 &= M^2 \exp(-M) \left[\sum_{m=2}^{+\infty} (m-1) \frac{M^{m-2}}{(m-1)!} + \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{M^{m-2}}{(m-1)!} \right] \\
 &= M^2 \exp(-M) \left[\exp(M) + \frac{1}{M} \exp(M) \right] \\
 &= M^2 + M
 \end{aligned}$$

Comme $M = \bar{m}$, on a donc $(\Delta m)^2 = \overline{m^2} - \bar{m}^2 = \bar{m}$ qui est une caractéristique importante de la loi de Poisson. Nous avons donc démontré les résultats du chapitre 5 concernant le bruit de photons.

Références

- [1] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, 3rd edition (Oxford University Press, 2000), chap. 3.
- [2] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995), chap. 9.

Annexe E

Etablissement de l'équation de Maxwell-Gauss macroscopique

Dans cette annexe, nous démontrons l'expression de la densité de charge macroscopique, qui a été définie au chapitre 11 lors de l'introduction des équations de Maxwell macroscopiques. On distingue les charges *liées* à un atome¹ des charges *non liées* :

$$\langle \rho_m \rangle = \langle \rho_{\text{lie}} \rangle + \langle \rho_{\text{non-liee}} \rangle . \quad (\text{E.1})$$

Le cas des charges non liées ne pose aucun problème pour la prise de moyenne spatiale :

$$\langle \rho_{\text{non-liee}} \rangle = \left\langle \sum_{j, \text{non-lie}} q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right\rangle = \sum_{j, \text{non-lie}} q_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (\text{E.2})$$

où la fonction w utilisée pour définir la moyenne spatiale a été introduite au chapitre 11 .

Le cas des charges liées doit être traité avec soin. On étudie dans un premier temps le cas d'un atome, dont la position est repérée par \mathbf{r}_a (position du noyau). Si les charges (électrons et protons) sont repérées par les positions \mathbf{r}_j dans le référentiel de l'atome (la position absolue des charges est $\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_j$), la densité de charge microscopique de ρ_a de l'atome s'écrit :

$$\rho_a(\mathbf{r}) = \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_a) \quad (\text{E.3})$$

et la prise de moyenne conduit à :

$$\langle \rho_a(\mathbf{r}) \rangle = \sum_j q_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_a) . \quad (\text{E.4})$$

Par construction, la fonction w qui permet de définir l'échelle macroscopique varie lentement à l'échelle de l'atome. On peut donc effectuer un développement limité de w autour de la position $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$. On obtient :

$$\langle \rho_a \rangle = q_a w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \mathbf{p}_a \cdot \nabla_{\mathbf{r}} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (\text{E.5})$$

¹Le mot "atome" doit être pris au sens large, et peut désigner également un ion ou une molécule.

où $q_a = \sum_j q_j$ est la charge totale de l'atome et $\mathbf{p}_a = \sum_j q_j \mathbf{r}_j$ est le moment dipolaire de l'atome. Ce moment dipolaire induit contribue à la charge moyenne de l'atome. On parle de *charges de polarisation*.

Dans le cas d'un milieu matériel, on somme les contributions de chacun des atomes :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \sum_a q_a w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (\text{E.6})$$

Le dernier terme peut se mettre sous la forme d'une divergence : $\sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = \text{div}[\sum_a w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \mathbf{p}_a]$. On introduit alors la densité de polarisation \mathbf{P} , définie par :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_a w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \mathbf{p}_a. \quad (\text{E.7})$$

Cette grandeur, homogène à un moment dipolaire par unité de volume, représente la polarisation induite du milieu à l'échelle macroscopique. Au final, en sommant la contribution des charges liées et non liées, on obtient :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{j, \text{non-lié}} q_j w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \sum_a q_a w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \text{div} \mathbf{P}. \quad (\text{E.8})$$

On regroupe en général les deux premiers termes sous l'appellation de *densité de charges libres*, notée ρ_{libre} . Notons que cette appellation est ambiguë car des charges liées peuvent contribuer à ρ_{libre} (exemple : charge d'un ion dans un diélectrique chargé). Une dénomination plus appropriée serait *densité de charge nette* (pour un milieu neutre, on a $\rho_{\text{libre}} = 0$). Finalement, la densité de charge intervenant dans l'équation de Maxwell-Gauss macroscopique $\text{div} \mathbf{E} = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle / \epsilon_0$ est :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}) - \text{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (\text{E.9})$$

Références

- [1] G. Russakoff, "A derivation of the macroscopic Maxwell equations", Am. J. Phys. **38**, 1188 (1970).
- [2] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chap. 6.

Annexe F

Méthode des perturbations en mécanique quantique

Dans cette annexe nous présentons la méthode des perturbations dépendantes du temps, qui est utilisée dans le cours au chapitre 18.

F.1 Position du problème

On considère un électron d'un atome (ou d'une molécule, d'un puits quantique, *etc*) décrit, dans son état non perturbé, par un hamiltonien H_0 indépendant du temps. On suppose connus les états propres et valeurs propres de H_0 (niveaux électroniques de l'atome isolé) :

$$H_0|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \quad (\text{F.1})$$

où l'ensemble des $|\phi_n\rangle$, noté $\{|\phi_n\rangle\}$, forme une base orthonormée.

Hypothèse : on se limite au cas où tous les états propres sont non dégénérés.

Le système est initialement dans un de ses états stationnaires $|\phi_j\rangle$.

A l'instant $t = 0$, on branche une perturbation $W(t) = \alpha U(t)$, avec $\alpha \ll 1$, l'opérateur U ayant des éléments de matrice de l'ordre de ceux de H_0 . On cherche l'état du système $|\psi(t)\rangle$ pour $t > 0$, qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H(t)|\psi(t)\rangle, \text{ avec } H(t) = H_0 + W(t). \quad (\text{F.2})$$

L'objectif est de déterminer une expression approchée de $|\psi(t)\rangle$ vérifiant l'équation (F.2).

F.2 Expression générale

On procède de la manière suivante : on décompose $|\psi(t)\rangle$ sur la base $\{|\phi_n\rangle\}$ des états stationnaires du hamiltonien non perturbé. On cherche ensuite l'équation vérifiée par les coefficients

de ce développement, et on applique la technique de perturbation habituelle (développement de la solution en puissances du paramètre α).

La décomposition de $|\psi(t)\rangle$ sur la base $\{|\phi_n\rangle\}$ s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\phi_n\rangle \quad (\text{F.3})$$

où les coefficients c_n sont en général complexes. En injectant cette décomposition dans (F.2), on obtient :

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n(t)}{dt} |\phi_n\rangle = \sum_n c_n(t) E_n |\phi_n\rangle + \sum_n c_n(t) W(t) |\phi_n\rangle . \quad (\text{F.4})$$

On projette maintenant cette équation sur $|\phi_p\rangle$, en utilisant le fait que $\langle\phi_p|\phi_n\rangle = \delta_{pn}$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_p(t)}{dt} &= c_p(t) E_p + \sum_n c_n(t) \langle\phi_p|W(t)|\phi_n\rangle \\ &= c_p(t) E_p + \sum_n \alpha c_n(t) U_{pn}(t) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

où l'on a posé $U_{pn}(t) = \langle\phi_p|U(t)|\phi_n\rangle$. Dans la suite, on fait l'hypothèse suivante¹ : $U_{pn}(t) = 0$ si $p = n$.

Il est pratique pour la suite d'effectuer le changement de variable suivant :

$$b_n(t) = c_n(t) \exp\left(i\frac{E_n}{\hbar}t\right) . \quad (\text{F.6})$$

L'équation (F.5) devient alors :

$$i\hbar \frac{db_p(t)}{dt} = \alpha \sum_n \exp(i\omega_{pn}t) b_n(t) U_{pn}(t) \text{ avec } \omega_{pn} = \frac{E_p - E_n}{\hbar} . \quad (\text{F.7})$$

On effectue maintenant le développement perturbatif sur la fonction $b_p(t)$. On écrit donc $b_p(t)$ sous la forme d'un développement en puissances de α :

$$b_p(t) = b_p^{(0)}(t) + b_p^{(1)}(t) \alpha + b_p^{(2)}(t) \alpha^2 + \dots \quad (\text{F.8})$$

On insère alors ce développement dans (F.7), et on identifie les termes de même ordre.

Ordre 0

On obtient $b_p^{(0)} = cte$. La fonction propre à l'ordre 0 s'écrit donc :

$$|\psi^{(0)}(t)\rangle = \sum_n b_n^{(0)} \exp\left(i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |\phi_n\rangle . \quad (\text{F.9})$$

¹Dans le cas d'un atome interagissant avec une onde électromagnétique, cette hypothèse signifie que l'atome n'a pas de moment dipolaire dans son état non perturbé.

Ordre 1

L'identification des termes proportionnels à α conduit à :

$$i\hbar \frac{db_p^{(1)}(t)}{dt} = \sum_n \exp(i\omega_{pn}t) b_n^{(0)}(t) U_{pn}(t) . \quad (\text{F.10})$$

A $t = 0$, on a supposé le système dans l'état $|\phi_j\rangle$, donc $b_n(t = 0) = \delta_{nj}$, et ceci pour toute valeur de α . On a ainsi : $b_n^{(0)}(t = 0) = \delta_{nj}$ et $b_n^{(r)}(t = 0) = 0$ pour $r \geq 1$. Or, $b_n^{(0)} = cte$ donc $b_n^{(0)}(t) = \delta_{nj}$, ce qui permet de réécrire l'Eq. (F.10) sous la forme :

$$i\hbar \frac{db_p^{(1)}(t)}{dt} = \exp(i\omega_{pj}t) U_{pj}(t) . \quad (\text{F.11})$$

Cette dernière équation s'intègre pour donner :

$$b_p^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \exp(i\omega_{pj}t') U_{pj}(t') dt' . \quad (\text{F.12})$$

En pratique, la grandeur utile est la probabilité de transition de l'état $|\phi_j\rangle$ (état initial) à un autre état $|\phi_f\rangle$, à un instant t donné, sous l'effet de la perturbation. Elle s'écrit :

$$P_{jf}(t) = |b_f(t)|^2 = |\alpha b_f^{(1)}(t)|^2 \quad (\text{F.13})$$

en se limitant à l'ordre 1 et en utilisant le fait que comme $f \neq j$, $b_f^{(0)}(t) = 0$. Si on note $W_{fj}(t) = \alpha U_{fj}(t) = \langle \phi_f | W(t) | \phi_j \rangle$, on a finalement :

$$P_{jf}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t \exp(i\omega_{fj}t') W_{fj}(t') dt' \right|^2 \quad (\text{F.14})$$

Ce résultat est l'expression la plus générale de la théorie des perturbations dépendantes du temps. Nous allons maintenant étudier deux cas particuliers très utiles en pratique dans lesquels l'expression prend une forme plus explicite.

F.3 Perturbation sinusoïdale

On suppose maintenant que le hamiltonien d'interaction est de la forme $W(t) = W \cos(\omega t)$ (c'est le cas, par exemple, lorsqu'un atome interagit avec une onde électromagnétique monochromatique à travers un couplage dipolaire électrique comme nous le verrons au chapitre 3). L'élément de matrice associé s'écrit alors :

$$W_{fj}(t) = W_{fj} \cos(\omega t) = \frac{W_{fj}}{2} [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] \quad (\text{F.15})$$

où W_{fj} est une constante complexe. L'expression générale (F.14) devient alors :

$$\begin{aligned} P_{jf}(t) &= \frac{1}{\hbar^2} |W_{fj}|^2 \left| \int_0^t \exp(i\omega_{fj}t') \cos(\omega t') dt' \right|^2 \\ &= \frac{|W_{fj}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{\exp[i(\omega_{fj} + \omega)t] - 1}{\omega_{fj} + \omega} + \frac{\exp[i(\omega_{fj} - \omega)t] - 1}{\omega_{fj} - \omega} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

A t fixé, $P_{jf}(t)$ présente des résonances pour $\omega = \pm\omega_{fj}$. Considérons les cas $\omega_{fj} > 0$, avec $\omega \geq 0$. Cette situation correspond à $E_f > E_j$, et donc à l'absorption de rayonnement par l'atome (le cas de l'émission induite correspondrait à $\omega_{fj} < 0$). On effectue l'*approximation de l'onde tournante*, qui consiste à ne garder dans l'expression (F.16) que le terme résonant. A première vue, cette approximation sera très bonne lorsque $|\omega - \omega_{fj}| \ll \omega_{fj}$ (nous préciserons les conditions de validité un peu plus loin). On obtient alors l'expression suivante de la probabilité de transition :

$$P_{jf}(t) = \frac{|W_{fj}|^2}{4\hbar^2} t^2 \left| \text{sinc} \frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right|^2 \quad (\text{F.17})$$

Comportement à la résonance

A la résonance, $\omega = \omega_{fj}$, d'où :

$$P_{jf}(t) = \frac{|W_{fj}|^2}{4\hbar^2} t^2 . \quad (\text{F.18})$$

La probabilité de transition évolue en t^2 . Ce comportement est valable aux temps courts uniquement (on doit avoir $P_{jf}(t) \ll 1$ pour que le développement perturbatif soit valable). Ceci implique $t \ll \hbar/|W_{fj}|$ (condition nécessaire). On montre dans l'annexe consacrée aux équations de Bloch optiques comment obtenir le comportement en régime non perturbatif.

F.4 Couplage avec un continuum. Règle d'or de Fermi

Dans cette dernière partie, on suppose que le système quantique comporte un continuum d'états finals, repérés par leur énergie E_f . Dans ces conditions, le résultat de la théorie des perturbations dépendantes du temps est connu sous le nom de règle d'or de Fermi². On décrit le continuum par une densité d'états notée $\rho(E_f)$, considérée comme une variable continue. On considère alors $|\langle \phi_f(E_f) | \psi(t) \rangle|^2$ comme la densité de probabilité de trouver $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t dans un état de la bande d'énergie $[E_f, E_f + dE_f]$. Cette grandeur s'exprime directement à partir de (F.17) :

$$|\langle \phi_f(E_f) | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{|W_{fj}|^2}{4\hbar^2} t^2 \left| \text{sinc} \frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right|^2 \quad (\text{F.19})$$

avec $W_{fj} = \langle \phi_f(E_f) | W | \phi_j(E_j) \rangle$, qui est une fonction de E_j , E_f et de la fréquence excitatrice ω . La probabilité de transition vers le continuum s'obtient ensuite en sommant sur l'ensemble des états finaux possibles :

$$P_{jc}(t) = \frac{t^2}{4\hbar^2} \int \left| W_{fj}(E_f, E_j, \omega) \right|^2 \left| \text{sinc} \frac{[(E_f - E_j)/\hbar - \omega]t}{2} \right|^2 \rho(E_f) dE_f . \quad (\text{F.20})$$

²Ce résultat d'une très grande utilité pratique a en effet été qualifié de "règle d'or de la mécanique quantique" par E. Fermi, et l'appellation a été conservée.

Comportement aux temps longs

Si t est suffisamment grand, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{sinc} \frac{(\omega_{fj} - \omega)t}{2} \right]^2 &\simeq \frac{2\pi}{t} \delta(\omega_{fj} - \omega) \\ &= \frac{2\pi}{t} \hbar \delta(E_f - E_j - \hbar\omega) \end{aligned}$$

qui est valable lorsque $t \gg 2\pi/|\omega_{fj} - \omega|$. L'expression (F.20) se simplifie alors pour donner :

$$P_{jc}(t) = \frac{\pi}{2\hbar} |W_{fj}(E_f = E_j + \hbar\omega)|^2 \rho(E_f = E_j + \hbar\omega) t . \quad (\text{F.21})$$

La probabilité de transition croît linéairement avec le temps. On préfère alors utiliser la probabilité de transition par unité de temps (ou *taux de transition*) qui est donc donnée par :

$$Q_{jc} = \frac{\pi}{2\hbar} |W_{fj}(E_f = E_j + \hbar\omega)|^2 \rho(E_f = E_j + \hbar\omega) \quad (\text{F.22})$$

C'est ce dernier résultats qui est connu sous le nom de *règle d'or de Fermi*. Il est très utilisé en pratique dans de nombreux domaines. Il montre que le taux transition est proportionnel à l'élément de matrice de transition W_{fj} (qui traduit l'intensité du couplage entre le système quantique et la perturbation) et la densité d'états des états finaux.

F.5 Validité de l'approximation de l'onde tournante

Pour terminer ce chapitre, nous discutons brièvement la validité de l'approximation de l'onde tournante. L'équation (F.16) comporte un terme de la forme

$$A_+ = \frac{\exp[i(\omega_{fj} + \omega)t] - 1}{\omega_{fj} + \omega} = i \exp[i(\omega_{fj} + \omega)t/2] \frac{\sin[(\omega_{fj} + \omega)t/2] - 1}{(\omega_{fj} + \omega)/2} \quad (\text{F.23})$$

et un terme de la forme

$$A_- = \frac{\exp[i(\omega_{fj} - \omega)t] - 1}{\omega_{fj} - \omega} = i \exp[i(\omega_{fj} - \omega)t/2] \frac{\sin[(\omega_{fj} - \omega)t/2] - 1}{(\omega_{fj} - \omega)/2} . \quad (\text{F.24})$$

Si l'on s'intéresse à l'allure du module de ces deux quantités en fonction de la fréquence ω , $|A_+|$ est une fonction centrée en $-\omega_{fj}$ et de largeur $\Delta\omega = 4\pi/t$ et $|A_-|$ est une fonction centrée en $+\omega_{fj}$ et de même largeur. Ces deux fonctions sont nettement séparées lorsque la condition $\Delta\omega \ll 2\omega_{fj}$ est vérifiée. Dans ce cas, lorsque $\omega \simeq \omega_{fj}$, seul le terme A_- contribue. L'approximation de l'onde tournante est alors valable. La condition de validité est donc $t \gg 2\pi/\omega_{fj}$ ce qui lorsque $\omega \simeq \omega_{fj}$ revient à $t \gg 2\pi/\omega$. Pour une excitation proche de la résonance, l'approximation de l'onde tournante est donc valable lorsqu'on observe le système à un temps long devant la période d'oscillation de l'excitation.

Ordre de grandeur : pour une transition électronique dans un atome ou une molécule, $t \simeq 10^{-7} - 10^{-9}$ s. Les fréquences optiques correspondent à $\omega \simeq 10^{15}$ Hz. La condition est très bien vérifiée.

Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris, 1997), Tome 2, chapitre XIII.

Annexe G

Traitement non perturbatif de l'interaction atome-lumière. Equations de Bloch optiques

Objectifs

- Décrire l'évolution temporelle d'un atome interagissant avec une onde incidente monochromatique (fréquence proche de la fréquence de Bohr d'une transition) sans utiliser l'approche perturbative.
- Etablir une équation d'évolution pour l'atome, prenant en compte le couplage avec le champ incident et le couplage avec l'extérieur (modes électromagnétiques du vide pour l'émission spontanée, collisions, *etc*).
- Discuter quelques comportements non perturbatifs.

G.1 Matrice densité. Système dans un état pur

G.1.1 Valeur moyenne d'une observable

Considérons un système dans un état $|\psi(t)\rangle = \sum c_n(t) |\psi_n\rangle$, où $\{|\psi_n\rangle\}$ est la base des états stationnaires d'une observable donnée. Soit A l'opérateur associé à une observable quelconque. Sa valeur moyenne (quantique) lorsque le système est dans l'état ψ est :

$$\begin{aligned}\langle A(t) \rangle &= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) \langle \psi_m | A | \psi_n \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) A_{mn}\end{aligned}\tag{G.1}$$

où l'on a noté A_{mn} les éléments de matrice de A dans la base $\{|\psi_n\rangle\}$.

Remarque : si $\{|\psi_n\rangle\}$ est la base des états stationnaires (états propres) de l'observable A , alors on a :

$$\langle A(t) \rangle = \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) a_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \sum_n a_n |c_n(t)|^2 . \quad (\text{G.2})$$

On a utilisé le fait que $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ et que les états sont orthonormés, ce qui implique $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$. Le résultat (G.2) s'interprète facilement. $|c_n(t)|^2$ est la probabilité pour le système d'être dans l'état $|\psi_n\rangle$ à l'instant t . Cet état étant état propre de A , la valeur moyenne de A dans cet état est parfaitement déterminée, et donnée par la valeur propre a_n .

G.1.2 Définition de $\rho(t)$

Afin d'écrire l'expression (G.1) différemment, on définit un opérateur $\rho(t)$, dit *opérateur densité*, de la manière suivante :

$$\boxed{\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|} \quad (\text{G.3})$$

En utilisant la base $\{|\psi_n\rangle\}$, on a aussi $\rho(t) = \sum_n c_n(t)|\psi_n\rangle\langle\psi_n| \sum_m c_m^*(t)\langle\psi_m|$. Les éléments de matrice de ρ , qui forment la *matrice densité*, sont alors $\rho_{nm}(t) = c_n(t)c_m^*(t)$. Grâce à ce nouvel opérateur, on peut mettre l'expression (G.1) sous la forme :

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (\text{G.4})$$

Cette expression montre en particulier que $\langle A(t) \rangle$ est indépendante de la base choisie pour représenter A (la trace étant invariante), ce qui n'est pas évident sur l'expression (G.1).

G.1.3 Equation d'évolution

Nous allons maintenant établir l'équation d'évolution de l'opérateur densité. $|\psi(t)\rangle$ vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H|\psi(t)\rangle . \quad (\text{G.5})$$

L'opérateur hamiltonien H étant auto-adjoint (hermitien), le dual de cette équation s'écrit :

$$-i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|}{dt} = \langle\psi(t)|H . \quad (\text{G.6})$$

On peut alors calculer la dérivée temporelle de l'opérateur densité :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| &= \left[i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \right] \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left[i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|}{dt} \right] \\ &= H|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle[-\langle\psi(t)|H] \\ &= H\rho - \rho H . \end{aligned}$$

La dernière expression est le commutateur de H et ρ , noté habituellement $[H, \rho]$. Nous avons ainsi établi l'équation différentielle vérifiée par ρ :

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho] \quad (\text{G.7})$$

G.2 Matrice densité. Mélange statistique d'états

Supposons maintenant le système à l'équilibre thermodynamique à la température T . Il a une probabilité p_i d'être dans l'état $|\psi_i\rangle$, décrite par les lois de la physique statistique (on dit alors que le système est décrit par un mélange statistique d'états). La valeur moyenne de l'observable A , prenant en compte à la fois la moyenne quantique (notée $\langle A \rangle$) et la moyenne thermodynamique (notée \bar{A}), s'écrit :

$$\langle \bar{A} \rangle = \sum_i p_i \langle A \rangle_{\psi_i} = \sum_i p_i \text{Tr}(\rho_i A) \quad (\text{G.8})$$

où ρ_i est l'opérateur densité du système dans l'état $|\psi_i\rangle$: $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. On définit alors l'opérateur densité pour le mélange statistique d'états :

$$\bar{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (\text{G.9})$$

qui permet d'écrire la valeur moyenne de l'opérateur A sous la forme :

$$\langle \bar{A} \rangle = \text{Tr}(\bar{\rho} A) \quad (\text{G.10})$$

La relation est la même que dans le cas d'un état pur. L'équation d'évolution de l'opérateur densité est également la même :

$$i\hbar \frac{d\bar{\rho}(t)}{dt} = [H, \bar{\rho}] \quad (\text{G.11})$$

G.3 Matrice densité d'un système à deux niveaux

Dans ce paragraphe, nous illustrons la notion de matrice densité dans le cas simple d'un système à deux niveaux non dégénérés, notés a et b , dans un état pur. On note $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ les deux états stationnaires d'énergie du système.

Pour un état quelconque $\psi = c_a|\psi_a\rangle + c_b|\psi_b\rangle$, l'opérateur densité est $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Sous forme matricielle, l'opérateur s'écrit (on parle alors de matrice densité) :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_a|^2 & c_a c_b^* \\ c_a^* c_b & |c_b|^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.12})$$

Les éléments diagonaux ρ_{aa} et ρ_{bb} de la matrice densité sont appelés *populations* des niveaux a et b , et les éléments non diagonaux sont appelés *cohérences*. Cette terminologie est justifiée par l'interprétation de ces éléments.

Populations : la probabilité pour le système d'être dans l'état $|\psi_a\rangle$ est $|c_a|^2 = \rho_{aa}$ (et de même pour l'état $|\psi_b\rangle$). Si l'on travaille avec un ensemble de systèmes identiques, on assimile le nombre de systèmes qui sont dans l'état $|\psi_a\rangle$ (i.e. la "population" dans l'état $|\psi_a\rangle$) avec la probabilité pour un système d'être dans cet état.

Cohérences : on peut comprendre cette appellation sur l'exemple du moment dipolaire associé à l'électron dans un système à deux niveaux. Si le système est dans l'état $\psi = c_a|\psi_a\rangle + c_b|\psi_b\rangle$, alors le moment dipolaire moyen s'écrit :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \langle \psi | \mathbf{D} | \psi \rangle = (c_a^* \ c_b^*) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{ab} \\ \mathbf{d}_{ba} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix} \quad (\text{G.13})$$

où \mathbf{d}_{kl} sont les éléments de matrice de l'opérateur moment dipolaire \mathbf{D} , en ayant supposé $\mathbf{d}_{aa} = \mathbf{d}_{bb} = 0$ (ce qui est le cas pour les atomes et plus généralement les systèmes centrosymétriques). On a donc finalement :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{d}_{ab} c_b c_a^* + \mathbf{d}_{ba} c_a c_b^* = 2\mathbf{d}_{ab} \operatorname{Re}(\rho_{ab}) , \quad (\text{G.14})$$

la dernière égalité provenant du fait que les états a et b étant liés, \mathbf{d}_{ab} est réel et donc $\mathbf{d}_{ba} = \mathbf{d}_{ba}^* = \mathbf{d}_{ab}$. On voit donc que lorsque le système est dans une superposition cohérente des deux états a et b , le moment dipolaire est non nul, et que ceci s'observe lorsque l'élément ρ_{ab} a une partie réelle non nulle. On retiendra que les éléments non diagonaux de la matrice densité décrivent les effets liés aux superpositions cohérentes d'états.

G.4 Equations de Bloch optiques

Dans tout le chapitre, on s'intéresse à un atome à deux niveaux électroniques non dégénérés. On note $|a\rangle$ et $|b\rangle$ les états stationnaires correspondant. Le système dans un état $|\psi\rangle = c_a|a\rangle + c_b|b\rangle$ est décrit par sa matrice densité :

$$\rho = \begin{pmatrix} |c_a|^2 & c_a c_b^* \\ c_a^* c_b & |c_b|^2 \end{pmatrix} . \quad (\text{G.15})$$

G.4.1 Relaxation spontanée

L'atome initialement dans l'état $|b\rangle$ peut se désexciter spontanément en émettant un photon, avec un taux noté Γ_{sp} . En l'absence de champ excitateur extérieur, les populations évoluent selon :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{aa}}{dt} &= \Gamma_{sp} \rho_{bb} \\ \frac{d\rho_{bb}}{dt} &= -\Gamma_{sp} \rho_{bb} . \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

Notons que ces relations impliquent la conservation de la population : $\rho_{aa} + \rho_{bb} = cte$.

L'émission spontanée influe aussi sur les cohérences. On admettra qu'elles évoluent selon :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -\frac{\Gamma_{sp}}{2} \rho_{ab} \\ \frac{d\rho_{ba}}{dt} &= -\frac{\Gamma_{sp}}{2} \rho_{ba} . \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Pour une justification de la forme de ces équations de relaxation, voir par exemple la référence [1]. S'il existe d'autres mécanismes de couplage avec l'extérieur que l'émission spontanée (exemples : collisions avec les molécules dans un gaz, avec les phonons dans un solide), ceux-ci modifient la phase relative entre les niveaux (même s'ils ne changent pas leur énergie), et diminuent ainsi fortement les cohérences. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{ab}}{dt} &= -\gamma \rho_{ab} \\ \frac{d\rho_{ba}}{dt} &= -\gamma \rho_{ba} \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

avec en général $\gamma \gg \Gamma_{sp}/2$.

G.4.2 Couplage avec un champ extérieur (laser)

On suppose maintenant qu'une onde électromagnétique monochromatique et polarisée (laser) est incidente sur l'atome. Le hamiltonien complet s'écrit alors $H = H_0 + H_1$, avec H_0 le hamiltonien de l'atome isolé (états propres $|a\rangle$ et $|b\rangle$) et $H_1(t)$ le hamiltonien d'interaction. On se place dans le cadre d'une interaction dipolaire électrique : $H_1(t) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r} = 0)$. Comme dans le chapitre 3, on note $H_1(t) = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$, avec ω la pulsation de l'onde incidente.

On cherche alors l'évolution de l'opérateur densité de l'atome :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_0 + H_1, \rho] + \left\{ \frac{d\rho}{dt} \right\}_{\text{relax}}. \quad (\text{G.19})$$

Dans le membre de droite, le premier terme décrit l'évolution hamiltonienne du système due au couplage avec le champ excitateur, et le second terme décrit le couplage à l'environnement (émission spontanée, collisions) qui tend à faire relaxer le système dans son état fondamental. Les deux types d'interactions étant considérés indépendants, les deux contributions s'ajoutent simplement.

A ce stade il est pratique d'utiliser une représentation matricielle des opérateurs. En notant $\mathbf{D}_{ab} = \langle a|\mathbf{D}|b\rangle = \langle b|\mathbf{D}|a\rangle$ et en le supposant réel (ce qui est vrai si $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont des états liés), les deux termes du hamiltonien s'écrivent :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{pmatrix} \quad (\text{G.20})$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{D}_{ab} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \\ -\mathbf{D}_{ab} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.21})$$

Pour les éléments de la matrice densité, on obtient en insérant ces expressions dans l'Eq. (G.19) :

$$\frac{d\rho_{aa}}{dt} = -i\Omega_R \cos(\omega t) (\rho_{ba} - \rho_{ab}) + \left\{ \frac{d\rho_{aa}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.22})$$

$$\frac{d\rho_{bb}}{dt} = i\Omega_R \cos(\omega t) (\rho_{ba} - \rho_{ab}) + \left\{ \frac{d\rho_{bb}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.23})$$

$$\frac{d\rho_{ab}}{dt} = i\omega_0 \rho_{ab} + i\Omega_R \cos(\omega t) (\rho_{aa} - \rho_{bb}) + \left\{ \frac{d\rho_{ab}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.24})$$

$$\rho_{ba} = \rho_{ab}^* \quad (\text{G.25})$$

Dans ces expressions, nous avons utilisé la pulsation de Bohr

$$\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar} \quad (\text{G.26})$$

et la *pulsation de Rabi*

$$\Omega_R = \frac{-\mathbf{D}_{ab} \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar} \quad (\text{G.27})$$

qui interviendront dans la suite.

G.4.3 Approximation de l'onde tournante. Equations de Bloch optiques

Comme dans le calcul perturbatif du chapitre 3, nous allons nous placer dans le cas où $\omega \simeq \omega_0$ (excitation quasi-résonante), et ne garder dans le terme $\cos(\omega t)$ que l'exponentielle qui, après intégration des équations différentielles, donne des dénominateurs résonants. C'est l'approximation de l'onde tournante.

En l'absence d'excitation, on a pour les cohérences ρ_{ab} et ρ_{ba} des comportements oscillants en $\exp(i\omega_0 t)$ et $\exp(-i\omega_0 t)$. Il est alors pratique d'introduire de nouvelles variables :

$$\begin{cases} \rho'_{ab} &= \rho_{ab} \exp(-i\omega_0 t) \\ \rho'_{ba} &= \rho_{ba} \exp(i\omega_0 t) \\ \rho'_{aa} &= \rho_{aa} \\ \rho'_{bb} &= \rho_{bb} \end{cases} \quad (\text{G.28})$$

Avec ces nouvelles variables, le système d'Eqs. (G.25) devient :

$$\frac{d\rho'_{aa}}{dt} = -i\frac{\Omega_R}{2} \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \rho'_{ba} - \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \rho'_{ab} \} + \left\{ \frac{d\rho'_{aa}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.29})$$

$$\frac{d\rho'_{bb}}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} \{ \exp[i(\omega - \omega_0)t] \rho'_{ba} - \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \rho'_{ab} \} + \left\{ \frac{d\rho'_{bb}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.30})$$

$$\frac{d\rho'_{ab}}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} \exp[i(\omega - \omega_0)t] (\rho'_{aa} - \rho'_{bb}) + \left\{ \frac{d\rho'_{ab}}{dt} \right\}_{\text{relax}} \quad (\text{G.31})$$

$$\rho_{ba} = \rho_{ab}^* \quad (\text{G.32})$$

Dans ces expressions, nous n'avons gardé que les termes faisant intervenir la différence des pulsations. Il est possible de simplifier encore l'écriture en posant :

$$\begin{cases} \sigma_{ab} &= \rho'_{ab} \exp[i(\omega_0 - \omega)t] \\ \sigma_{ba} &= \rho'_{ba} \exp[i(\omega - \omega_0)t] \\ \sigma_{aa} &= \rho'_{aa} \\ \sigma_{bb} &= \rho'_{bb} \end{cases} \quad (\text{G.33})$$

On obtient alors le système d'équations connu sous le nom d'*équations de Bloch optiques*¹ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{aa}}{dt} &= -i\frac{\Omega_R}{2} (\sigma_{ba} - \sigma_{ab}) + \Gamma_{sp} \sigma_{bb} \\ \frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= i\frac{\Omega_R}{2} (\sigma_{ba} - \sigma_{ab}) - \Gamma_{sp} \sigma_{bb} \\ \frac{d\sigma_{ab}}{dt} &= i(\omega_0 - \omega) \sigma_{ab} - i\frac{\Omega_R}{2} (\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) - \gamma \sigma_{ab} \\ \frac{d\sigma_{ba}}{dt} &= -i(\omega_0 - \omega) \sigma_{ba} + i\frac{\Omega_R}{2} (\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) - \gamma \sigma_{ba} \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

¹Cette dénomination vient du fait que ces équations sont similaires à celles que Bloch avait obtenues pour décrire le comportement dynamique d'un système magnétique à deux états de spin.

G.5 Traitement non perturbatif : oscillations de Rabi, saturation

G.5.1 Oscillations de Rabi

On considère ici un atome à deux niveaux pour lequel les phénomènes de relaxation sont négligeables ($\Gamma_{sp} \simeq 0$ et $\gamma \simeq 0$). Il est possible de s'approcher expérimentalement de cette situation idéale en plaçant un atome unique dans une cavité peu absorbante et comportant un très faible nombre de modes électromagnétiques. Afin de résoudre les équations de Bloch optiques sans termes de relaxation, on cherche des solutions sous la forme $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(0) \exp(\lambda t)$. En substituant dans (G.34), on obtient un système linéaire dont les inconnues sont les $\sigma_{ij}(0)$. L'annulation du déterminant (pour avoir des solutions autres que la solution nulle) conduit à :

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = i\Omega \text{ ou } \lambda = -i\Omega \quad (\text{G.35})$$

avec

$$\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_R^2}, \quad (\text{G.36})$$

cette grandeur jouant le rôle d'une pulsation de Rabi généralisée.

Intéressons nous à la solution dans un cas particulier. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'atome est dans l'état fondamental noté $|a\rangle$: $|\psi(t=0)\rangle = |a\rangle$. Alors $\sigma_{aa}(0) = 1$ et $\sigma_{bb}(0) = \sigma_{ab}(0) = \sigma_{ba}(0) = 0$. La population du niveau excité en fonction du temps est alors :

$$\sigma_{bb}(t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (\text{G.37})$$

La probabilité de trouver l'atome dans l'état excité $|b\rangle$ à l'instant t oscille : ce sont les *oscillations de Rabi*. Pour une excitation résonante ($\omega = \omega_0$, $\Omega = \Omega_R$), on a $\sigma_{bb}(t) = \sin^2(\Omega_R t/2)$. L'atome oscille périodiquement entre son état fondamental et son état excité. Si $\omega \neq \omega_0$, la fréquence d'oscillation est différente et l'amplitude est diminuée. Si les termes de relaxation ne sont plus négligeables, les oscillations s'amortissent et les populations tendent vers leur valeur stationnaire. Un comportement expérimental typique est reproduit sur la Fig. G.1.

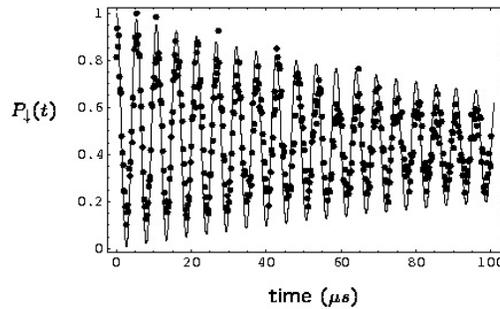


Figure G.1: Oscillations de Rabi d'un atome piégé dans une cavité et excité par une onde électromagnétique résonante (l'atome se comporte alors comme un système à deux niveaux). La grandeur représentée est la population du niveau fondamental $1 - \sigma_{bb}(t)$.

G.5.2 Comportement aux temps courts

L'atome étant dans l'état $|a\rangle$ à l'instant $t = 0$, la solution aux temps courts est :

$$\sigma_{bb}(t) \simeq \frac{\Omega_R^2 t^2}{4} \quad (\text{G.38})$$

qui est la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|b\rangle$ à l'instant t . On retrouve donc le comportement en t^2 obtenu par la méthode des perturbations avec excitation sinusoïdale (équation F.18 du chapitre 2). Notons que le résultat exact donné par l'Eq. (G.37) fixe la condition de validité du résultat perturbatif : il faut que l'approximation $\sin^2(\Omega t/2) \sim (\Omega t/2)^2$ soit valable.

G.5.3 Solution stationnaire. Saturation

Le régime stationnaire correspond à $d\sigma_{ij}/dt = 0$ dans le système d'équations (G.34). En utilisant le fait que $\sigma_{aa} + \sigma_{bb} = 1$ et $\sigma_{ab} = \sigma_{ba}^*$, le système se résout et conduit à :

$$\sigma_{bb} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2 \gamma / \Gamma_{sp}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2 + \Omega_R^2 \gamma / \Gamma_{sp}}. \quad (\text{G.39})$$

Dans le cas où le seul mécanisme de relaxation de l'atome est l'émission spontanée (ex : atome unique dans une cavité), alors $\gamma = \Gamma_{sp}/2$ (résultat que nous avons admis). On a alors :

$$\sigma_{bb} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_{sp}^2/4 + \Omega_R^2/2}. \quad (\text{G.40})$$

On peut chercher comment évoluent les populations stationnaires lorsqu'on augmente l'intensité de l'onde excitatrice (cette intensité est proportionnelle à Ω_R^2). Il est utile à ce stade de définir le *paramètre de saturation* :

$$s = \frac{\Omega_R^2/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_{sp}^2/4} \quad (\text{G.41})$$

Avec ce paramètre, les populations stationnaires s'écrivent simplement :

$$\sigma_{bb} = \frac{s}{2(1+s)} \quad \sigma_{aa} = \frac{2+s}{2(1+s)} \quad (\text{G.42})$$

Lorsqu'on examine l'évolution des populations en fonction de s , on met en évidence le phénomène de *saturation*. Pour $s = 0$, on a $\sigma_{aa} = 1$ et $\sigma_{bb} = 0$, car nous avons supposé l'atome initialement dans son état fondamental. Lorsque s augmente, on peut noter deux comportements importants :

- Pour $s \gg 1$, les deux populations tendent vers leur valeur de saturation $\sigma_{aa} = \sigma_{bb} = 1/2$. Notons que ce comportement est le même que celui prédit par les équations de relaxation d'Einstein.
- On a toujours $\sigma_{bb} \leq \sigma_{aa}$, ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'obtenir une inversion de population avec un système à deux niveaux (résultat qui a son importance lorsque l'on cherche à réaliser un laser).

G.6 Indice d'un gaz d'atomes (traitement non perturbatif)

Dans cette section, nous appliquons le formalisme de équations de Bloch optiques à la détermination des propriétés optiques d'un gaz d'atomes ². Dans un premier temps, nous déterminons la polarisabilité d'un seul atome. Dans un second temps, nous en déduisons la susceptibilité d'un gaz d'atomes contenant n atomes par unité de volume. Cette grandeur est directement liée à l'indice de réfraction (ou à la constante diélectrique) et permet donc de décrire les propriétés optiques macroscopiques du système. Nous examinons le cas particulier de la réponse linéaire (valable lorsque $s \ll 1$), et le lien avec l'approche classique.

G.6.1 Polarisabilité atomique

Supposons que l'on excite un atome unique avec une onde monochromatique polarisée de la forme $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t)$, où le vecteur unitaire \mathbf{u} détermine la direction de polarisation. Le moment dipolaire moyen de l'atome, en régime stationnaire, s'obtient à partir de la matrice densité :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{D}) = \mathbf{D}_{ab} (\rho_{ab} + \rho_{ba}) = \mathbf{D} [\sigma_{ab} \exp(i\omega t) + \sigma_{ba} \exp(-i\omega t)] \quad (\text{G.43})$$

où l'on a supposé $\langle a | \mathbf{D} | a \rangle = \langle b | \mathbf{D} | b \rangle = 0$ et noté $\mathbf{D} = \langle a | \mathbf{D} | b \rangle = \langle b | \mathbf{D} | a \rangle$.

Il faut donc déterminer σ_{ab} en régime stationnaire (σ_{ba} étant simplement le complexe conjugué). Le calcul est similaire à celui mené dans la section précédente. Il conduit à :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\sigma_{ab}) &= \frac{\Omega_R \gamma / 2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{1}{1 + s} \\ \text{Re}(\sigma_{ab}) &= \frac{(\omega - \omega_0) \Omega_R / 2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \frac{1}{1 + s} \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans (G.43), on obtient :

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \frac{\mathbf{D}_{ab}}{2} \Omega_R \frac{1}{1 + s} \left[\frac{(\omega - \omega_0) + i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \exp(i\omega t) + \frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \exp(-i\omega t) \right]. \quad (\text{G.44})$$

La direction de polarisation du champ exciteur est décrite par le vecteur unitaire \mathbf{u} . Le moment dipolaire induit selon cette direction s'écrit :

$$\langle D \rangle = -\frac{D_{ab}^2 E_0}{2\hbar} \frac{1}{1 + s} \left[\frac{(\omega - \omega_0) + i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \exp(i\omega t) + \frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \exp(-i\omega t) \right]. \quad (\text{G.45})$$

En utilisant la convention habituelle pour les champs monochromatiques, $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega) \exp(-i\omega t)]$ et $\langle \mathbf{D}(t) \rangle = \text{Re}[\langle \mathbf{D}(\omega) \rangle \exp(-i\omega t)]$, et la définition de la polarisabilité ³ $\alpha(\omega)$:

$$\langle \mathbf{D}(\omega) \rangle = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\omega) \quad (\text{G.46})$$

²La dénomination "gaz" est à comprendre au sens d'un milieu suffisamment dilué pour que les effets de champs locaux soient négligeables. Ceci signifie que chaque atome du système ne perçoit que le champ exciteur extérieur, et pas le champ diffusé par les autres atomes.

³Certaines molécules ont une réponse optique anisotrope. Dans ce cas, la polarisabilité est un tenseur. Nous ne calculons alors ici que la composante décrivant le moment dipolaire induit dans la direction de polarisation du champ exciteur.

on obtient :

$$\alpha(\omega) = -\frac{D_{ab}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{1+s} \frac{1}{(\omega - \omega_0) + i\gamma} \quad (\text{G.47})$$

G.6.2 Susceptibilité d'un gaz d'atomes

Pour une assemblée d'atomes de densité volumique n , on peut déterminer facilement les propriétés optiques macroscopiques. La densité de polarisation \mathbf{P} , homogène à une densité volumique de moment dipolaire, est donnée par $\mathbf{P} = n \langle \mathbf{D} \rangle$. Elle est reliée au champ exciteur de chaque atome, qui pour un milieu dilué est le champ exciteur extérieur $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{u} \cos(\omega t)$, par la relation :

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (\text{G.48})$$

où la grandeur $\chi(\omega)$ est par définition la *susceptibilité* optique. La constante diélectrique est $\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega)$ et l'indice optique est $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$. En utilisant l'expression (G.47), la susceptibilité s'écrit :

$$\chi(\omega) = -n \frac{D_{ab}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{1+s} \frac{1}{(\omega - \omega_0) + i\gamma} . \quad (\text{G.49})$$

Il est utile en pratique de séparer la partie réelle et la partie imaginaire. La partie imaginaire de la susceptibilité décrit l'absorption par le milieu. En notant $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + \chi''(\omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= -n \frac{D_{ab}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{1+s} \frac{\omega - \omega_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \\ \chi''(\omega) &= n \frac{D_{ab}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{1+s} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (\text{G.50})$$

Ces expressions induisent deux remarques importantes :

- En l'absence de mécanisme de relaxation des atomes ($\gamma = 0$), l'absorption est nulle ($\chi''(\omega) = 0$).
- Ces expressions sont exactes (non perturbatives vis-à-vis de l'intensité de l'excitation). La présence du paramètre de saturation $s \propto \Omega_R^2$ induit une contribution *non linéaire* dans la réponse du milieu au champ exciteur. La réponse linéaire s'obtient pour $s \ll 1$, qui correspond à une excitation de faible intensité.

G.6.3 Susceptibilité linéaire

A la limite $s \ll 1$, on obtient la susceptibilité linéaire :

$$\chi(\omega) = -n \frac{D_{ab}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{(\omega - \omega_0) + i\gamma} . \quad (\text{G.51})$$

Cette expression est utile dans de nombreux cas pratiques, les effets non linéaires liés à la saturation n'apparaissant que lorsqu'on utilise des sources lasers intenses (un ordre de grandeur sera calculé dans la suite). Elle est très similaire à celle rencontrée classiquement, en utilisant le

modèle de l'électron élastiquement lié. Le lien entre les deux approches s'établit en introduisant la notion de force d'oscillateur, comme nous allons le voir maintenant. On se place dans le cas où le couplage avec l'environnement se fait par émission spontanée uniquement, de telle sorte que $\gamma = \Gamma_{sp}$.

G.6.4 Modèle classique de l'électron élastiquement lié

Dans ce modèle, on modélise l'atome par un électron (considéré comme une particule classique de masse m et de charge e) lié au noyau par une force de rappel élastique de la forme $\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$, où \mathbf{r} est la position de l'électron. La pulsation ω_0 est la pulsation de résonance de la liaison élastique. En présence du champ exciteur, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E}(\mathbf{r} = 0) - m\omega_0^2\mathbf{r} - m\Gamma_R \frac{d\mathbf{r}}{dt} . \quad (\text{G.52})$$

Dans cette expression, nous avons utilisé les hypothèses suivantes :

- Force magnétique négligeable devant la force électrique (hypothèse toujours vraie pour un électron non relativiste).
- Déplacement de l'électron induit par le champ exciteur petit devant la longueur d'onde du champ exciteur (ce qui justifie que le champ qui intervient est pris en $\mathbf{r} = 0$).
- Terme de dissipation par rayonnement proportionnel à la vitesse, décrit par un facteur de proportionnalité Γ_R (homogène à l'inverse d'un temps).

Pour une justification de ces hypothèses, voir la référence [3]. Dans le cas d'une excitation monochromatique, de la forme $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\omega) \exp(-i\omega t)]$, on peut chercher la solution en régime permanent sous la forme $\mathbf{r}(t) = \text{Re}[\mathbf{r}(\omega) \exp(-i\omega t)]$. On obtient :

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{-e\mathbf{E}/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_R\omega} , \quad (\text{G.53})$$

expression qui peut se simplifier dans le cas d'une excitation quasi-résonante ($\omega \simeq \omega_0$) :

$$\mathbf{r}(\omega) \simeq \frac{-e\mathbf{E}}{2m\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega - i\Gamma_R/2} . \quad (\text{G.54})$$

La polarisabilité classique, que nous noterons $\alpha_{cl}(\omega)$, se déduit du moment dipolaire de l'atome $\mathbf{p}(\omega) = -e\mathbf{r}(\omega) = \alpha_{cl}(\omega)\epsilon_0\mathbf{E}(\omega)$. On obtient :

$$\alpha_{cl}(\omega) = \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\Gamma_R/2} . \quad (\text{G.55})$$

La susceptibilité linéaire d'un système dilué d'atomes est alors donnée par

$$\chi_{cl}(\omega) = n\alpha_{cl}(\omega) , \quad (\text{G.56})$$

où n est le nombre d'atomes par unité de volume.

G.6.5 Force d'oscillateur

Le résultat classique (G.55)-(G.56) a la même forme que le résultat (G.51) issu du calcul quantique. C'est un résultat remarquable. Afin de donner à l'expression quantique une forme analogue à l'expression issue du modèle classique de l'électron élastiquement lié, on introduit la *force d'oscillateur* de la transition $a \leftrightarrow b$, notée f_{ab} :

$$f_{ab} = \frac{2m\omega_{ab}}{e^2\hbar} D_{ab}^2 \quad (\text{G.57})$$

Il s'agit d'une grandeur sans dimension. En assimilant la fréquence de Bohr ω_{ab} (quantique) à la fréquence de résonance ω_0 (classique), et le taux d'émission spontanée Γ_{sp} (quantique) au taux d'amortissement par rayonnement Γ_R (classique), on peut écrire la susceptibilité linéaire quantique, donnée par l'Eq. (G.51), sous la forme :

$$\chi(\omega) = f_{ab} \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega_{ab}} \frac{1}{\omega - \omega_{ab} + i\Gamma_{sp}/2} \quad (\text{G.58})$$

On remarque alors que la susceptibilité quantique s'écrit simplement sous la forme du produit de la force d'oscillateur et de l'expression classique de la susceptibilité. L'atome se comporte donc comme un oscillateur classique (modèle de l'électron élastiquement lié), dont le poids est corrigé par un préfacteur d'origine quantique (la force d'oscillateur).

Remarque : dans le cas d'un système réel à plusieurs niveaux, et d'une excitation non résonante avec une fréquence de Bohr, il faut sommer sur toutes les transitions électroniques possibles. On écrit alors :

$$\chi(\omega) = \sum_{b>a} f_{ab} \frac{e^2}{2m\epsilon_0\omega_{ab}} \frac{1}{\omega - \omega_{ab} + i\Gamma_{sp}/2}. \quad (\text{G.59})$$

L'atome se comporte alors comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques classiques, dont les fréquences de résonance sont les fréquences de Bohr. Les forces d'oscillateurs f_{ab} sont les poids relatifs de chacun des oscillateurs.

Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique Quantique* (Hermann, Paris, 1997), Tome 1, chapitre III, complément E.
- [2] E. Rosencher et B. Vinter, *Optoélectronique* (Dunod, Paris, 2002), chapitre 1, complément E.
- [3] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford University Press, 2000), 3ème édition, chapitre 2.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'Interaction entre Photons et Atomes* (Interéditions/CNRS, 1996), chapitre V.
- [5] J.D. Jackson, *Electrodynamique Classique* (Dunod, Paris, 2001), chapitre 16.