

# Introduction aux transferts radiatifs

Rémi Carminati

Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C);  
Ecole Centrale Paris, Centre National de la Recherche Scientifique,  
92295 Châtenay-Malabry Cedex. E-mail : remi.carminati@em2c.ecp.fr

## I. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les concepts et méthodes permettant de modéliser les transferts radiatifs aux courtes échelles. Le rayonnement électromagnétique se propageant dans un milieu quelconque est caractérisé par plusieurs échelles de longueur : longueur d'onde, longueur de cohérence, libre parcours moyen (de diffusion, de transport, d'absorption), épaisseur de peau. Afin de couvrir plusieurs domaines d'intérêt en micro et nanothermique, le cours se divise en deux parties.

Dans une première partie, nous étudions la propagation du rayonnement en milieu diffusant et absorbant. L'outil fondamental est l'équation de transfert radiatif. Nous étudions tout particulièrement le cas des systèmes dont la taille caractéristique est de l'ordre du libre parcours moyen  $l$  (ou dont le temps d'évolution est de l'ordre de  $l/c$  où  $c$  est la vitesse de propagation de l'énergie), mais reste grande devant la longueur d'onde et la longueur de cohérence. Nous décrivons les différents régimes de transport (ballistique, de diffusion multiple et diffusif), et nous soulignons l'analogie qui existe entre ce problème et celui de la conduction thermique.

Dans une seconde partie, nous abordons le cas des systèmes dont la taille caractéristique est inférieure à la longueur d'onde et à la longueur de cohérence. Un formalisme électromagnétique est alors indispensable à la modélisation des transferts radiatifs. Nous introduisons une méthode générale de calcul, fondée sur le théorème fluctuation-dissipation. Cette méthode sera utilisée dans le chapitre 6 consacré à l'étude des transferts radiatifs dans les nanostructures.

## II. EQUATION DE TRANSFERT RADIATIF

L'équation de transfert radiatif (ETR) a été introduite en astrophysique pour décrire la propagation du rayonnement dans les milieux interstellaires [1], et en neutronique pour décrire la propagation des neutrons dans des réacteurs [2]. L'ETR est une équation de transport de la luminance (*specific intensity* en anglais). Dans cette partie, nous introduisons la luminance de manière phénoménologique, ainsi que les phénomènes d'absorption, de diffusion, et d'émission thermique. Nous établissons ensuite l'ETR à partir d'un bilan d'énergie.

### A. Luminance, flux, densité d'énergie

Par définition de la *luminance*  $L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ , le flux d'énergie radiative monochromatique  $P_\nu$  traversant un élément de surface  $dS$  centré au point  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , dans un angle solide élémentaire  $d\Omega$  centré sur la direction  $\mathbf{u}$ , dans l'intervalle de fréquences  $[\nu, \nu + d\nu]$  et au temps  $t$  s'écrit :

$$P_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS d\Omega d\nu \quad (1)$$

Les notations utilisées sont précisées sur la Fig. 1. La luminance s'exprime en  $W.m^{-2}.sr^{-1}.Hz^{-1}$  en unité SI.

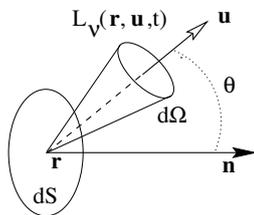


FIG. 1: Géométrie utilisée pour définir la luminance.

On peut introduire le *vecteur flux radiatif*  $\mathbf{q}_\nu$ , quantité non directionnelle, qui s'exprime en fonction de la luminance  $L_\nu$  par :

$$\mathbf{q}_\nu(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} d\Omega \quad (2)$$

Le vecteur  $\mathbf{q}_\nu$ , qui est défini ici dans un cadre purement radiométrique, s'identifie au vecteur de Poynting défini dans le cadre de la théorie électromagnétique. Son flux à travers une surface  $S$  donne le flux global, par unité de fréquence, qui traverse cette surface (unité  $W/Hz$ ). Par contre, définir la luminance dans un cadre électromagnétique est plus difficile, et requiert l'utilisation de la théorie de la cohérence (voir par exemple la réf.[3]). Cette difficulté provient du fait que le concept phénoménologique de flux traversant une surface *dans une direction donnée* n'est pas évident à traduire en langage ondulatoire (en particulier le vecteur de Poynting ne donne pas cette information).

La *densité d'énergie* par unité de fréquence, au point  $\mathbf{r}$  et à l'instant  $t$ , est donnée par :

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \frac{L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)}{c} d\Omega \quad (3)$$

La vitesse  $c$  qui intervient dans (3) est la vitesse de propagation de l'énergie. Dans une image corpusculaire, la densité d'énergie  $u_\nu(\mathbf{r}, t)$  peut être reliée à la densité volumique de photons par unité de fréquence  $\nu$ , notée  $n_\nu(\mathbf{r}, t)$ , par la relation  $u_\nu(\mathbf{r}, t) = n_\nu(\mathbf{r}, t) h\nu$ . Notons que si la luminance est isotrope, on a  $u_\nu(\mathbf{r}, t) = 4\pi L_\nu(\mathbf{r}, t)/c$ .

## B. Absorption, diffusion et émission thermique

### 1. Absorption

Considérons un flux d'énergie radiative monochromatique  $P_\nu$  se propageant dans un milieu absorbant dans une direction  $\mathbf{u}$  *perpendiculaire* à la surface  $dS$ . On note  $s$  l'abscisse curviligne le long de la direction  $\mathbf{u}$ . Sur un élément de longueur  $ds$ , une fraction  $dP_\nu$  de l'énergie est absorbée. De manière tout à fait générale, on écrit :

$$dP_\nu(s + ds, \mathbf{u}, t) = -\kappa_\nu P_\nu(s, \mathbf{u}, t) ds \quad (4)$$

Le coefficient  $\kappa_\nu$  introduit dans cette expression est le *coefficient d'absorption* monochromatique. Son inverse  $l_a = 1/\kappa_\nu$  est le libre parcours moyen d'absorption (ou *longueur d'absorption*).

### 2. Extinction par diffusion

Dans le processus de diffusion, une fraction de l'énergie se propageant initialement dans la direction  $\mathbf{u}$  est diffusée dans une direction  $\mathbf{u}'$  différente, ce qui contribue donc à la diminution du flux d'énergie dans la direction  $\mathbf{u}$ . On procède alors comme pour l'absorption, en introduisant le coefficient de diffusion (*scattering coefficient* en anglais)  $\sigma_\nu$ . Son inverse  $l_d = 1/\sigma_\nu$  est le libre parcours moyen de diffusion (ou *longueur de diffusion*).

Si l'on s'intéresse à l'énergie se propageant dans une direction déterminée (un faisceau collimaté par exemple), alors les deux processus d'absorption et de diffusion contribuent à *l'extinction* de l'énergie incidente. On peut écrire cela symboliquement sous la forme *Extinction = Absorption + Diffusion*. On parle d'un milieu absorbant lorsque le processus d'absorption prédomine sur celui de la diffusion (et inversement). Par exemple, les particules constituant l'encre de Chine ou des suies dans une fumée vont plus absorber le rayonnement visible incident que le diffuser (elles apparaissent noires). Par contre, un nuage est un milieu très diffusant (et peu absorbant) dans le domaine visible (il apparaît blanc).

On peut alors introduire le *coefficient d'extinction* qui vaut :

$$\beta_\nu = \sigma_\nu + \kappa_\nu \quad (5)$$

Son inverse  $l_{ext} = 1/\beta_\nu$  est la *longueur d'extinction*. En particulier, le flux d'énergie associé à un faisceau collimaté dans une direction donnée dans un milieu décroît selon la loi  $P_\nu(s) = P_\nu(0) \exp(-\beta_\nu s)$  (loi de Beer-Lambert).

Pour caractériser le pouvoir diffusant d'un milieu, on utilise *l'albédo*, qui est défini par :

$$a_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\sigma_\nu}{\sigma_\nu + \kappa_\nu} \quad (6)$$

Si l'albédo vaut 0, le milieu est purement absorbant (encre de Chine dans le visible). S'il vaut 1, le milieu est purement diffusant (nuage dans le visible).

### 3. Diffusion : fonction de phase

Lors de la diffusion, l'énergie est redistribuée dans toutes les directions. En particulier, si l'on s'intéresse à l'évolution entre  $s$  et  $s + ds$  du flux se propageant dans la direction  $\mathbf{u}$ , de l'énergie se propageant initialement dans une direction différente  $\mathbf{u}'$  peut, après diffusion, se propager dans la direction  $\mathbf{u}$ . Elle contribue alors à l'augmentation du flux dans la direction  $\mathbf{u}$ . Pour décrire ce phénomène, on introduit la *fonction de phase*  $p_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ . Elle représente la fraction du flux d'énergie qui, arrivant au point  $\mathbf{r}$  dans la direction  $\mathbf{u}'$ , est diffusé dans la direction  $\mathbf{u}$ . Des exemples de fonction de phase sont donnés dans l'Annexe A. L'accroissement du flux dû à la diffusion entre  $s$  et  $s + ds$  s'écrit alors :

$$dP_\nu(s + ds, \mathbf{u}, t) = \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(s, \mathbf{u}, \mathbf{u}') P_\nu(s, \mathbf{u}', t) d\Omega' ds \quad (7)$$

Remarques :

- Lorsque le milieu est homogène, la fonction de phase est indépendante de la position  $\mathbf{r}$  (nous ferons cette hypothèse dans toute la suite).
- Il existe différentes normalisations de la fonction de phase (variant selon les auteurs). Nous utiliserons la normalisation suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') d\Omega' = 1 \quad (8)$$

Si la fonction de phase est constante, on parle de diffusion *isotrope* (répartition équiprobable de l'énergie dans toutes les directions de l'espace par diffusion). Sinon on parle de diffusion *anisotrope*.

- La fonction de phase dépend de la direction d'incidence  $\mathbf{u}'$  et de la direction de diffusion  $\mathbf{u}$ . Pour des particules ayant une certaine symétrie (des sphères par exemple), la fonction de phase ne dépend que de l'angle relatif  $\Theta$  entre les deux directions (et plus précisément du cosinus de cet angle). On note alors  $p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = p_\nu(\cos \Theta)$ .

### 4. Emission thermique

Sur un élément de longueur  $ds$  le long de la direction  $\mathbf{u}$ , une fraction  $dP_\nu$  d'énergie peut être émise thermiquement. On écrit alors :

$$dP_\nu(s + ds, \mathbf{u}, t) = \eta_\nu ds \quad (9)$$

où  $\eta_\nu$  est la *coefficient d'émission* monochromatique. Si le milieu est à l'équilibre thermodynamique local (ETL), la luminance en tout point est la luminance d'équilibre  $n^2 L_\nu^0(T)$  à la température locale  $T$ , où  $n$  est la partie réelle de l'indice de réfraction du milieu et  $L_\nu^0(T)$  la luminance de Planck. De plus, à l'ETL, le flux absorbé est égal au flux émis en tout point. On a donc [1] :

$$\eta_\nu = \kappa_\nu n^2 L_\nu^0(T) \quad (10)$$

## C. Etablissement de l'ETR (bilan d'énergie radiative)

Nous allons effectuer un bilan d'énergie radiative un élément de volume  $dV$  (voir Fig. 2). La contribution négative au bilan provient de l'extinction (par absorption et diffusion) et la contribution positive provient à la fois de la diffusion et de l'émission thermique.

Raisonnons sur la densité d'énergie directionnelle  $u_\nu(s, \mathbf{u}, t)$  qui est liée à la luminance par la relation :

$$u_\nu(s, \mathbf{u}, t) = \frac{L_\nu(s, \mathbf{u}, t)}{c} \quad (11)$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'énergie. Le bilan d'énergie sur l'élément de volume  $dV$  s'écrit :

$$\begin{aligned} u_\nu(s + c dt, \mathbf{u}, t + dt) dV &= u_\nu(s, \mathbf{u}, t) dV \\ &- (\kappa_\nu + \sigma_\nu) u_\nu(s, \mathbf{u}, t) dV c dt + \kappa_\nu n^2 \frac{L_\nu^0(T)}{c} dV c dt \\ &+ \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') u_\nu(s, \mathbf{u}', t) d\Omega' dV c dt \end{aligned}$$

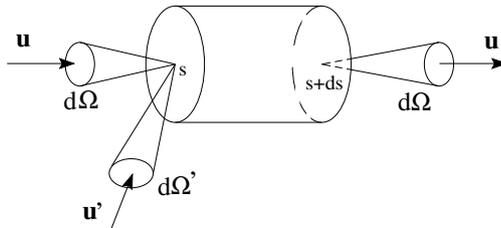


FIG. 2: Système considéré pour effectuer le bilan d'énergie radiative. On a  $ds = c dt$  le long de la direction  $\mathbf{u}$ .

En réarrangeant les termes de cette équation et en utilisant la relation (11), nous obtenons :

$$\frac{L_\nu(s + c dt, \mathbf{u}, t + dt) - L_\nu(s, \mathbf{u}, t)}{c dt} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(s, \mathbf{u}, t) + \kappa_\nu n^2 L_\nu^0(T) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L_\nu(s, \mathbf{u}', t) d\Omega' \quad (12)$$

A la limite où  $dt$  tend vers zéro, le membre de gauche est la dérivée totale de la luminance :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} L_\nu(s, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (13)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur gradient par rapport à la variable de position  $\mathbf{r}$ . Nous obtenons finalement l'équation de transfert radiatif qui s'écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \kappa_\nu n^2 L_\nu^0(T) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' \quad (14)$$

#### D. Discussion

L'ETR est une équation intégral-différentielle qui décrit le transport de la luminance, grandeur dépendant de la position, d'une direction et du temps. On notera l'analogie qui existe entre cette équation et l'équation de Boltzmann introduite en théorie cinétique du transport de particules. Cette analogie est utilisée notamment dans les chapitres consacrés au transport de phonons pour modéliser la conduction thermique dans les solides. En particulier, de nombreuses techniques de résolution de l'ETR ont été développées dans le cadre du transfert radiatif [1, 4, 5]. Ces techniques peuvent être étendues au cas de la conduction thermique par le phonons (voir le chapitre 5).

Dans l'établissement de l'ETR, nous avons fait apparaître des échelles de longueur : les longueurs d'absorption et de diffusion. Selon le rapport entre les échelles caractéristiques des systèmes étudiés et ces grandeurs, différents régimes de transfert radiatif sont observés : régime balistique, régime de diffusion multiple, régime diffusif. Nous allons maintenant nous intéresser à la description de ces différents régimes. Du fait de l'analogie entre l'ETR et l'équation de Boltzmann pour le transport de phonons, les phénomènes physiques que nous mettrons en évidence seront directement transposables au cas de la conduction thermique. Nous nous intéresserons tout d'abord au régime diffusif, puis aux régime pour lequel les échelles caractéristiques des systèmes sont de l'ordre des (ou inférieures aux) libres parcours moyens, qui sont les régimes rencontrés en micro et nanothermique.

### III. DE L'ETR À L'APPROXIMATION DE LA DIFFUSION

Dans cette partie, nous allons montrer qu'aux grandes échelles (d'espace et de temps), l'ETR peut se simplifier en une équation de transport pour la densité d'énergie. Cette grandeur ne dépend plus de la direction de propagation, ce qui simplifie grandement le problème. L'équation de transport pour la densité d'énergie, obtenue à la limite des grandes échelles, est une équation de diffusion (dont la forme est identique à l'équation de la chaleur). Dans le régime de diffusion, le flux radiatif est proportionnel au gradient de la densité d'énergie. Le coefficient multiplicatif est appelé coefficient de diffusion. Notons au passage une difficulté de vocabulaire qui vient du fait que le mot "diffusion" en français est utilisé pour décrire deux phénomènes très différents. La diffusion de la lumière par une particule (*scattering* en anglais) n'a rien à voir avec la diffusion de la chaleur dans un solide (*diffusion* en anglais). En particulier, le coefficient de diffusion (*diffusion coefficient* en anglais) dont nous parlons ici n'est pas le coefficient de diffusion  $\sigma_\nu$  (*scattering coefficient* en anglais) introduit précédemment !

Une fois l'équation de diffusion établie, nous montrerons l'analogie qui existe entre le régime diffusif pour le transfert radiatif et la conduction thermique aux grandes échelles dans un solide ou un gaz (loi de Fourier). Notons que l'équation de diffusion est rencontrée dans de nombreux phénomènes de transport, et est très utilisée en pratique dans des domaines allant des transferts thermiques à l'imagerie en milieu biologique, en passant par l'imagerie photothermique [6].

Nous discuterons ensuite les transitions entre régimes, à partir de l'ETR complète, en fonction de la taille caractéristique du système étudié. Nous nous intéresserons particulièrement à la transition vers le régime non-diffusif (non Fourier), et insisterons sur les comportements clés et les ordres de grandeur. Les résultats obtenus sont directement transposables (au-moins qualitativement) au cas de la conduction thermique.

Pour simplifier l'exposé, nous considérons un milieu froid (émission thermique du milieu négligeable aux fréquences considérées). Ceci correspond par exemple au transport de rayonnement visible dans un milieu dont la température est de l'ordre de 300 K.

## A. De l'approximation $P_1$ à l'équation de diffusion

Considérons un milieu diffusant, pour lequel la longueur d'absorption  $l_a$  est très grande par rapport à la longueur de diffusion  $l_d$  (albédo proche de 1). L'approximation de la diffusion est applicable *a priori* pour un tel milieu si sa longueur caractéristique est supérieure à  $l_d$ . Il s'agit donc d'un milieu pour lequel il y a diffusion multiple. Au cours de la diffusion, la luminance tend à devenir isotrope. Il est alors possible de chercher une approximation de la luminance sous la forme de la somme d'un terme isotrope et d'un terme correctif dépendant de la direction : c'est l'idée de l'approximation  $P_1$ . Une façon systématique d'écrire cette approximation consiste à développer la luminance sur la base des polynômes de Legendre. On parle d'approximation  $P_1$  lorsque qu'on ne garde que les deux premiers termes, et d'approximation  $P_n$  lorsque l'on va jusqu'à l'ordre  $n$ . L'approximation  $P_1$  est le point de départ usuel pour établir l'approximation de la diffusion [4]. Notons que si l'absorption n'est pas faible, cette approche n'est pas valable. Nous reviendrons sur ce point dans la suite. Il est possible d'utiliser une autre démarche, fondée sur une analyse asymptotique des modes propres de l'ETR, développée initialement pour le transport de neutrons [2].

Dans ce cours nous allons détailler l'approche fondée sur l'approximation  $P_1$ . Le point de départ de l'analyse est l'équation de transfert radiatif en régime dépendant du temps. L'objectif est de relier le flux radiatif à la densité d'énergie. En utilisant les notations d'Einstein, l'ETR (14) s'écrit (pour un milieu froid) :

$$\frac{1}{c}\partial_t L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = -u_i \partial_i L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) - \beta L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' \quad (15)$$

Afin d'alléger les notations, nous avons supprimé les indices  $\nu$  pour toutes les grandeurs radiatives, en gardant à l'esprit que nous travaillons avec un rayonnement monochromatique.

### 1. Equation de conservation de l'énergie

Il est possible d'établir une équation de conservation de l'énergie reliant la densité d'énergie, définie par l'Eq. (3) au vecteur flux radiatif, défini par l'Eq. (2). L'ETR est une équation de conservation de l'énergie pour la partie du rayonnement qui se propage dans une direction donnée  $\mathbf{u}$ . Afin d'obtenir une équation concernant  $u$ , il suffit d'intégrer l'Eq. (15) sur toutes les directions  $\mathbf{u}$  (c'est-à-dire intégrer sur  $d\Omega$ ). On obtient ainsi :

$$\partial_t u(\mathbf{r}, t) = -\partial_i q_i(\mathbf{r}, t) - c \kappa u(\mathbf{r}, t) \quad (16)$$

### 2. Expression du flux radiatif

Nous cherchons maintenant à établir une expression générale du vecteur flux radiatif. Pour cela, nous allons multiplier l'Eq. (15) par  $u_j$  et intégrer de nouveau sur les directions  $\mathbf{u}$ . On obtient :

$$\frac{1}{c}\partial_t q_j(\mathbf{r}, t) = - \int_{4\pi} u_j u_i \partial_i L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega - \beta q_j(\mathbf{r}, t) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') u_j L(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' d\Omega \quad (17)$$

De cette équation on tire une expression du vecteur flux radiatif :

$$q_j(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta c}\partial_t q_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\beta} \int u_j u_i \partial_i L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega + \frac{a}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') u_j L(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' d\Omega \quad (18)$$

Le dernier terme de cette équation peut se mettre sous une forme plus simple en utilisant la relation :

$$\int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') u_j d\Omega = 4\pi g u'_j \quad (19)$$

où  $g$  désigne la valeur moyenne de  $\cos \Theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$  :

$$g = \langle \cos \Theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\Omega \quad (20)$$

Ce résultat peut se montrer pourvu que la fonction de phase ne dépende que de  $\cos \Theta$  (ce qui est le cas par exemple si les particules diffusantes sont sphériques). On obtient alors pour le flux radiatif :

$$q_j(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\beta c} \partial_t q_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\beta} \int_{4\pi} u_j u_i \partial_i L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega + a g q_j(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

soit encore :

$$q_j(\mathbf{r}, t) = \frac{-1}{1 - a g} \left[ \frac{1}{\beta c} \partial_t q_j(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\beta} \int_{4\pi} u_j u_i \partial_i L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega \right] \quad (22)$$

Cette expression est générale. La seule hypothèse faite à ce stade concerne la fonction de phase qui ne doit dépendre que du cosinus de l'angle relatif de diffusion  $\cos \Theta$ .

### 3. Approximation de la diffusion

Afin d'obtenir une expression du flux radiatif sous la forme d'une loi de diffusion, on introduit l'approximation  $P_1$ , qui revient à supposer que la luminance est quasi-isotrope. Cette hypothèse est valable si de nombreux événements de diffusion ont assuré l'isotropie, ce qui n'est possible que si l'absorption est suffisamment faible. On peut alors représenter la luminance sur une base de polynômes de Legendre en s'arrêtant à l'ordre un [4]. On obtient alors :

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{4\pi} L^0(\mathbf{r}, t) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u} \quad (23)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur flux radiatif. En utilisant cette forme de la luminance, le second terme de l'Eq. (22) peut se mettre sous une forme explicite. On obtient finalement :

$$q_j(\mathbf{r}, t) = \frac{-c}{3[\kappa + \sigma(1 - g)]} \partial_j u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c[\kappa + \sigma(1 - g)]} \partial_t q_j(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

Dans cette expression apparaît un terme  $\sigma(1 - g)$ , dont l'inverse définit une nouvelle échelle de longueur : le libre parcours moyen de transport (ou *longueur de transport*) :

$$l_{tr} = \frac{1}{\sigma(1 - g)} = \frac{l_d}{1 - g} \quad (25)$$

Cette échelle de longueur est l'échelle caractéristique de variation du flux radiatif (et de la densité d'énergie) en régime diffusif.

Dans de nombreux cas, le terme  $\partial_t q_j$  dans l'Eq. (24) est négligeable devant le gradient de la densité d'énergie. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les deux termes  $[\kappa + \sigma(1 - g)] q_j$  et  $1/c \partial_t q_j$ . Si  $\tau$  est le temps caractéristique de variation du flux, et  $q$  l'ordre de grandeur du flux, l'ordre de grandeur du premier terme est  $[\kappa + \sigma(1 - g)] q \sim q/l_{tr}$  (pour un milieu peu absorbant), et celui de second terme est  $1/(c\tau) q$ . Le second terme est donc négligeable si la condition  $l_{tr} \ll c\tau$  est vérifiée. Même pour  $l_{tr}$  de quelques mm, la condition est vérifiée tant que  $\tau > 0,1$  ns.

En négligeant le terme  $\partial_t q_j$  dans l'Eq. (24), on obtient un flux radiatif proportionnel au gradient de la densité d'énergie :

$$q_j(\mathbf{r}, t) = \frac{-c}{3[\kappa + \sigma(1 - g)]} \partial_j u(\mathbf{r}, t) = -D \partial_j u(\mathbf{r}, t) \quad (26)$$

où l'on a fait apparaître le coefficient de diffusion  $D$ . Cette expression du flux a la forme de la loi de Fourier (ou encore de la loi de Fick ou de la loi d'Ohm, qui sont toutes des lois de diffusion).

Une fois cette relation obtenue, il est aisé de montrer que la densité d'énergie  $u$  satisfait une équation de diffusion. Il suffit pour cela de reporter l'expression (26) dans l'équation de conservation de l'énergie (16). En négligeant là-aussi le terme en  $\partial_t q_j$ , on obtient :

$$D \Delta u(\mathbf{r}, t) = \partial_t u(\mathbf{r}, t) + \kappa c u(\mathbf{r}, t) \quad (27)$$

## B. Discussion

Le résultat que nous venons d'établir montre qu'à la limite des grandes échelles (spatiale et temporelle), la densité d'énergie radiative dans un milieu diffusant obéit à une équation de diffusion (du même type que l'équation de la chaleur). Le flux d'énergie est proportionnel au gradient de densité d'énergie. *Le régime diffusif ainsi obtenu est analogue au régime dans lequel la loi de Fourier est applicable lorsque l'on parle de conduction thermique.* Dans ce cas, la fonction de distribution caractérisant les porteurs d'énergie (molécules pour un gaz, phonons pour un cristal) obéit à l'équation de Boltzmann (de même que la luminance obéit à l'ETR). La démarche pour modéliser la conduction thermique est donc tout à fait analogue à celle utilisée pour modéliser la propagation du rayonnement en milieu diffusant [7, 8]. Le régime de Fourier est obtenu dans la limite des petits nombres de Knudsen (voir le chapitre sur le Transport en Milieux Dilués), de même que le régime diffusif est obtenu dans la limite  $l_{tr} \ll L$  et  $l_{tr}/c \ll \tau$ ,  $L$  étant la taille caractéristique du système et  $\tau$  son temps caractéristique d'évolution.

Deux remarques sont à faire concernant l'établissement de l'équation de diffusion (27) :

- L'approche utilisant l'approximation  $P_1$  conduit à un coefficient de diffusion  $D = c/[3(\kappa + \sigma(1-g))] = c/[3(l_a + l_{tr})]$ . Cependant, d'autres approches sont possibles et conduisent à une équation de diffusion, mais avec un coefficient de diffusion différent. En particulier, la dépendance de  $D$  en fonction de l'absorption diffère d'une approche à l'autre. Ce point a fait l'objet d'études récentes, du fait de son impact dans le domaine de l'imagerie en milieu diffusant, où l'absorption ne peut en général pas être négligée. Voir par exemple les réfs. [9].
- Si l'on conserve le terme dépendant du temps dans l'Eq. (24), on obtient une équation appelée équation des télégraphistes. Cette équation a l'avantage de donner lieu à une vitesse de propagation limitée égale à  $c/\sqrt{3}$ . On supprime ainsi l'inconvénient de l'équation de diffusion qui donne à tout instant une réponse non nulle à une distance arbitrairement grande de la source. Cet inconvénient est bien connu en conduction thermique aux temps courts, l'équation de la chaleur présentant le même problème de réponse instantanée.

## C. Approximation de Rosseland

Pour conclure cette partie sur l'approximation de la diffusion, nous allons montrer que l'approximation de Rosseland (permettant d'introduire une conductivité radiative dans un milieu absorbant et non diffusant) peut être obtenue à partir de l'Eq. (26). Supposons un milieu absorbant et émissif (nous levons ici l'hypothèse de milieu froid) qui soit localement optiquement épais ( $l_a$  inférieure à l'échelle de variation de la luminance dans le milieu). En tout point s'établit alors une situation d'équilibre thermodynamique local. La luminance est donc la luminance d'équilibre à la température locale au point considéré. A chaque fréquence  $\nu$ , on a donc :

$$L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \simeq L_\nu^0[T(\mathbf{r})] \quad (28)$$

Le flux radiatif monochromatique s'écrit donc, d'après (26) :

$$q_{\nu,j}(\mathbf{r}) = \frac{-4\pi}{3\kappa} \partial_j L_\nu^0[T(\mathbf{r})] \quad (29)$$

où l'on a utilisé le fait que  $u_\nu = 4\pi L_\nu^0/c$ . En intégrant sur les fréquences, on obtient le flux radiatif en fonction de la température locale du milieu :

$$q_j(\mathbf{r}) = \frac{-4}{3\kappa} \partial_j [\sigma_S T^4(\mathbf{r})] \quad (30)$$

où  $\sigma_S$  est la constante de Stefan. En explicitant le gradient, on obtient finalement :

$$q_j(\mathbf{r}) = \frac{-16}{3\kappa} \sigma_S T^3(\mathbf{r}) \partial_j T(\mathbf{r}) = -k_{rad} \partial_j T(\mathbf{r}) \quad (31)$$

Cette expression du flux est formellement analogue à la loi de Fourier pour la conduction. Il apparaît une conductivité radiative équivalente  $k_{rad}$ , dite conductivité de Rosseland (qui dépend fortement de la température). L'existence de cette conductivité repose sur les mêmes hypothèses que l'approximation de la diffusion que nous avons étudiée ci-dessus.

#### IV. ANALYSE DES DIFFÉRENTS RÉGIMES DE TRANSPORT

Dans cette partie, nous allons étudier les différents régimes de transport en fonction des échelles spatiale et temporelle du système étudié : régime balistique, régime intermédiaire de diffusion multiple, régime diffusif. Nous allons pour cela utiliser des résultats expérimentaux [10] et de simulation numériques de l'ETR en géométrie plane (transmission à travers une couche de milieu diffusant d'épaisseur  $L$ ). La méthode numérique utilisée est détaillée dans la référence [11].

##### A. Transmission statique : conductance "ohmique" et déviation à courte échelle

La résultat expérimental représenté sur la Fig. 3 (figure de gauche) montre des mesures de transmittivité diffuse à travers une couche plane ("slab") en fonction de l'épaisseur  $L$  de la couche [10]. L'échantillon est constitué de particules de  $TiO_2$  d'indice  $n = 2.8$  et de diamètre moyen 220 nm. L'épaisseur des couches varie entre 1.43  $\mu\text{m}$  et 18  $\mu\text{m}$ . La longueur d'onde du flux lumineux incident vaut  $\lambda = 780$  nm. La longueur de transport est estimée à  $l_{tr} = 0.95$   $\mu\text{m}$ . Sur la figure de droite, on a représenté le résultat obtenu par un calcul ETR en régime statique [12].

En régime diffusif, il est possible de calculer la transmittivité diffuse  $T$  d'une couche plane en régime statique. On obtient :

$$T = \frac{l_{tr} + z}{L + 2z} \quad (32)$$

Dans cette expression intervient une longueur  $z$  (qui est de l'ordre de  $l_{tr}$ ), qui provient de l'écriture des conditions aux limites aux frontières de la couche dans l'approximation de la diffusion [4, 13]. C'est pour cette raison que les résultats expérimentaux de la Fig. 3 sont représentés en fonction de  $(L + 2z)^{-1}$ . Notons que le résultat (32) n'étant *a priori* valable que lorsque  $L \gg l_{tr}$ , on a en fait  $T \propto 1/L$ . Cette dépendance en  $1/L$  de la transmission diffuse est caractéristique du régime diffusif. Ce comportement se retrouve notamment dans la loi d'Ohm (conductance électrique d'un fil de longueur  $L$  proportionnelle à  $1/L$ ) et la loi de Fourier (conductance thermique d'un mur plan d'épaisseur  $L$  proportionnelle à  $1/L$ ).

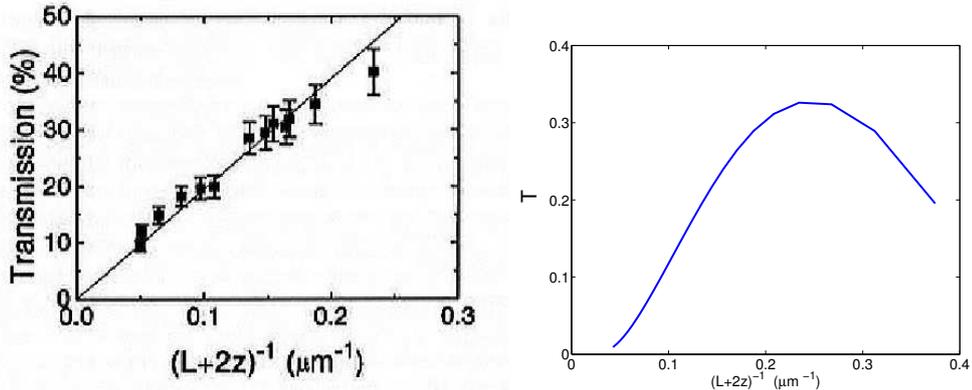


FIG. 3: Flux transmis en régime statique à travers une couche plane constitué de particules de  $TiO_2$  d'indice  $n = 2.8$  et de diamètre moyen 220 nm. La longueur d'onde du flux lumineux incident est  $\lambda = 780$  nm. La longueur de transport est  $l_{tr} = 0.95$   $\mu\text{m}$ . Figure de gauche : mesure, d'après [10]. La droite représente la dépendance linéaire attendue en régime diffusif, voir Eq. (32). Figure de droite : calcul ETR, d'après [12]

Le comportement diffusif est bien visible sur la Fig. 3, pour les grandes valeurs de  $L$  (régime linéaire). Lorsque  $L$  diminue ( $1/(L+2z)$  augmente), on distingue sur les points expérimentaux une déviation par rapport au comportement diffusif. Cette déviation est encore plus visible sur le calcul numérique qui a été effectué pour de plus petites valeurs de  $L$ . Ce résultat est un premier exemple de comportement non diffusif aux courtes échelles de longueur. Sur cet exemple en régime statique, la déviation apparaît pour une taille  $L \sim l_{tr}$  (qui est de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$  sur cet exemple).

##### B. Transitions entre régimes dans le cas dynamique

La question des transitions entre régimes a été étudiée dans le contexte de la propagation du rayonnement en milieu diffusant et absorbant par différents auteurs, en utilisant l'ETR comme équation de transport [14–18]. En

régime dynamique, l'analyse que nous présentons ici repose sur la mesure (ou le calcul) du temps de décroissance d'impulsions lumineuses transmises à travers une couche plane. La transmittivité totale hémisphérique (intégrée angulairement)  $T(t)$  décroît exponentiellement aux temps longs. De cette décroissance en  $\exp(-t/\tau)$ , on extrait un temps de décroissance  $\tau$ . Il est alors possible d'introduire un coefficient de diffusion effectif  $D$ , en identifiant le temps de décroissance avec celui obtenu en régime diffusif. Pour un milieu diffusant et absorbant, on a alors :

$$D = \frac{L_{\text{eff}}^2}{\pi^2} \left( \frac{1}{\tau} - \kappa c \right) \quad (33)$$

La longueur effective de la couche qui intervient est  $L_{\text{eff}} = L + 2z$ . Comme dans le cas statique, ceci provient de l'écriture des conditions aux limites aux frontières de la couche dans l'approximation de la diffusion. On a alors  $z = z_0(1 + R)/(1 - R)$ , où  $z_0 = 0.7l_{tr}$  est la distance dite d'"extrapolation" et  $R$  le coefficient de réflexion moyen à l'interface entre le milieu diffusant et le milieu extérieur à la couche. Il n'est pas utile dans ce cours de discuter en détail comment est obtenue cette condition aux limites (qui est de toute façon approximative, l'approximation de la diffusion n'étant *a priori* pas valable près des parois). Pour plus de détails, voir par exemple la réf. [19].

Sur la Fig. 4, nous avons représenté une mesure (figure de gauche, d'après [10]) et une simulation numérique fondée sur la résolution de l'ETR dépendante du temps (figure de droite, d'après [12, 18]). La grandeur représentée est le coefficient de diffusion effectif, en fonction de l'épaisseur du système  $L$  (le coefficient  $D$  est normalisé par sa valeur asymptotique, prise à  $L = 25 \mu\text{m} \simeq 27l_{tr}$ ). On observe une déviation importante du régime diffusif pour  $L < 8l_{tr}$ . L'accord entre la modélisation utilisant l'ETR et l'expérience est très bon, les deux montrant une déviation de plus de 50 % à faible épaisseur. Lorsque  $L$  diminue, on passe progressivement d'un régime de transport diffusif (de type loi de Fourier) à un régime de diffusion multiple intermédiaire (non diffusif), puis à un régime où le transport balistique à travers la couche prédomine. Il faut noter que l'ETR permet de traiter sans ambiguïté les transitions entre ces régimes (la séparation entre régime balistique et régime de diffusion multiple dans l'ETR est discutée au paragraphe suivant).

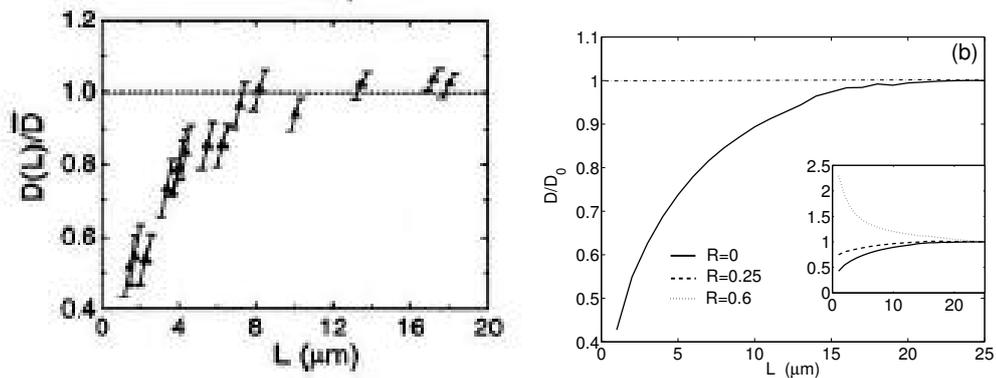


FIG. 4: Coefficient de diffusion effectif d'une couche plane en fonction de son épaisseur  $L$ . La couche contient des particules de  $TiO_2$  et est éclairée à  $\lambda = 780\text{nm}$ .  $g = 0.27$ ,  $l_s = 0.65\mu\text{m}$  et  $l_a = 200\mu\text{m}$  (albedo  $a = 0.997$ ). Indice effectif de la couche  $n = 1.39$ . (a): Mesures, d'après [10]. (b): Coefficient de diffusion  $D$  définie par l'Eq. (33), normalisé par sa valeur asymptotique  $D_0$ . Trait plein : coefficient de réflexion moyenné sur les angles  $\bar{R} = 0$ . L'encadré montre le résultat obtenu pour différents niveaux de réflexion interne.

La simulation numérique permet également de montrer que la modification du coefficient de diffusion effectif aux courtes échelles est extrêmement sensible au niveau de réflexion interne dans la couche. L'encadré de la Fig. 3 montre qu'en changeant le coefficient de réflexion moyen  $R$ , on change complètement l'allure de la courbe  $D(L)$  (on peut même passer d'une diminution à une augmentation de  $D$  aux courtes échelles). Cet exemple montre donc que *la réflexion aux interfaces du système devient le phénomène prépondérant lorsque la taille du système est de l'ordre du libre parcours moyen de transport  $l_{tr}$  (ou inférieure)*. Ce phénomène l'emporte devant la diffusion de volume, et pilote donc la décroissance de la transmission aux temps longs (et donc la valeur du coefficient de diffusion effectif).

Il est intéressant de souligner encore une fois l'analogie entre la transmission de rayonnement à travers une couche diffusante (qui peut être traitée par l'ETR) et la conduction thermique à travers un film solide (qui peut être modélisée par l'équation de Boltzmann). On a représenté sur la Fig. 5 la conductivité thermique équivalente d'un film de Si, en fonction de son épaisseur  $L$  (mesures et modèles, d'après [20]). On remarque une diminution de la conductivité équivalente à courte échelle. La ressemblance avec le résultat de la Fig. 3 est frappante. En particulier, ce résultat met en évidence le rôle de la réflexion aux interfaces (les résultats expérimentaux ne sont explicables que si ce phénomène est bien pris en compte dans la modélisation).

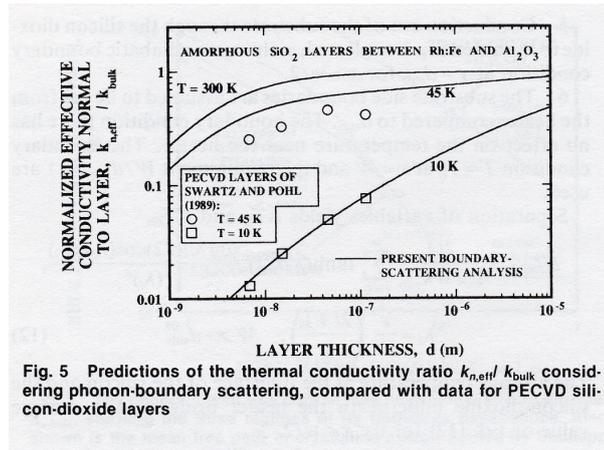


Fig. 5 Predictions of the thermal conductivity ratio  $k_{n,eff}/k_{bulk}$  considering phonon-boundary scattering, compared with data for PECVD silicon-dioxide layers

FIG. 5: Conductivité thermique d’une couche de silicium amorphe en fonction de son épaisseur  $L$ . On note la réduction de la conductivité effective à faible épaisseur. D’après [20].

### C. Composante balistique et diffuse dans l’ETR

Pour conclure sur cette partie concernant l’ETR et les transitions entre régimes, nous allons montrer que les contributions balistique et de diffusion multiple peuvent être clairement séparées dans l’ETR. Pour cela, nous allons supposer que le système est éclairé par un faisceau collimaté se propageant dans la direction  $\mathbf{u}_0$ , et écrire la luminance en tout point sous la forme de la somme d’une composante collimatée (balistique) et d’une composante diffuse :

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = L_{bal}(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + L_{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \quad (34)$$

où la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$  est à prendre au sens de l’intégrale sur l’angle solide  $d\Omega$  [on a en fait  $\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) / |\sin \theta_0|$ ]. En insérant la décomposition (34) dans l’ETR (14), on obtient deux équations. Pour la composante balistique, l’ETR devient (dans l’hypothèse d’un milieu froid) :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} L_{bal}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla L_{bal}(\mathbf{r}, t) = -(\kappa + \sigma) L_{bal}(\mathbf{r}, t) \quad (35)$$

L’intégration de cette équation donne la loi de Beer-Lambert pour l’évolution de la luminance balistique. Dans le cas d’un milieu non absorbant, on retrouve que la luminance balistique décroît avec un longueur caractéristique  $l_d = 1/\sigma$ . Pour la composante diffuse, l’ETR s’écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} L_{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla L_{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = -(\kappa + \sigma) L_{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L_{diff}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' + \frac{\sigma}{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0) L_{bal}(\mathbf{r}, t) \quad (36)$$

Il apparaît dans cette équation un terme source proportionnel à la composante balistique au point et à l’instant considérés. Ce terme décrit le fait que l’énergie quittant la composante balistique par diffusion est redistribuée dans la composante diffuse. Le poids relatif du transport balistique et du transport diffus pilote le régime global. Ce n’est que lorsque toute l’énergie est transportée par la composante diffuse *et* que les échelles spatiales et temporelles considérées sont grandes (devant  $l_{tr}$  et  $l_{tr}/c$ ) que le transport est diffusif.

## V. APPROCHE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE L’ÉMISSION THERMIQUE

Dans cette dernière partie, nous quittons le problème du transfert en milieu diffusant et absorbant, pour aborder le cas des systèmes dont la taille est inférieure à la longueur d’onde, et éventuellement à la longueur de cohérence (par exemple, deux corps solides aux températures usuelles, séparés d’une distance sub-micronique, et échangeant par rayonnement thermique). Pour traiter ce genre de situations, un formalisme électromagnétique est indispensable. Le chapitre 6 est dédié à l’étude détaillée de ce problème. Ici, nous nous contenterons d’introduire la méthode générale de calcul, fondée sur le théorème fluctuation-dissipation.

## A. Approche intuitive du mécanisme d'émission thermique

Il est possible de comprendre le mécanisme d'émission thermique, et de calculer les flux émis, en utilisant des notions élémentaires de rayonnement électromagnétique. Lorsqu'un corps est maintenu à une température  $T$ , les charges qui le composent (essentiellement les électrons libres pour un métal ou les ions pour un cristal polaire) sont en mouvement désordonné d'agitation thermique. Dans chaque élément de volume, il apparaît un courant volumique fluctuant (ou un moment dipolaire fluctuant), que l'on ne peut décrire que de manière statistique. Ce courant dépendant du temps, il rayonne un champ électromagnétique, qui est le champ émis thermiquement par le corps chauffé.

Le courant étant donné, pour calculer le champ émis thermiquement, il suffit de résoudre un problème de rayonnement d'antenne. Cependant, le courant n'est connu que statistiquement. Sa valeur moyenne est nulle, et donc celle du champ émis aussi (les équations de Maxwell étant linéaires, le lien entre le courant et le champ rayonné est linéaire). Par contre, la valeur quadratique moyenne des courants fluctuants n'est pas nulle. La puissance moyenne du champ émis thermiquement n'est donc pas nulle, de même que toutes les grandeurs intéressantes en transferts thermiques (la puissance absorbée dans un solide, le flux du vecteur de Poynting, la densité d'énergie... sont toutes des grandeurs quadratiques par rapport au champ électromagnétique).

## B. Principe d'un calcul d'émission thermique. Théorème fluctuation-dissipation

Nous allons donner ici le principe du calcul du champ émis thermiquement à une fréquence  $\omega$  fixée, par un corps maintenu à une température  $T$  et décrit par sa constante diélectrique  $\epsilon(\omega) = n^2(\omega)$ , où  $n$  est l'indice complexe du milieu. Le courant fluctuant (et le champ) sont des variables aléatoires stationnaires. Pour travailler en domaine fréquentiel, il est nécessaire d'introduire leur densité spectrale de puissance.

### 1. Densité spectrale de puissance. Corrélation spectrale

Raisonnons sur le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . On peut introduire la fonction de corrélation de la composante  $k$  et de la composante  $l$  du champ :  $C_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \langle E_k(\mathbf{r}, t) E_l(\mathbf{r}', t') \rangle$ . Elle ne dépend que de  $\tau = t - t'$  car le champ est supposé statistiquement stationnaire. La densité spectrale de puissance est alors la transformée de Fourier de la fonction de corrélation par rapport au temps :

$$W_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int C_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (37)$$

Cette grandeur est une mesure de la corrélation spatiale du champ à une fréquence donnée. En effet, on peut écrire la fonction de corrélation spectrale de la manière suivante :

$$\langle E_k(\mathbf{r}, \omega) E_l(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 2\pi W_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (38)$$

La présence de la distribution de Dirac  $\delta(\omega - \omega')$  montre qu'il n'y a pas de corrélation entre les composantes à deux fréquences différentes, ce qui est une conséquence de la stationnarité. Les deux mêmes expressions s'obtiennent pour la densité de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ .

### 2. Théorème fluctuation-dissipation

Nous avons vu que les grandeurs intéressantes en transferts thermiques sont quadratiques en champ, et donc en densité de courant (le lien étant linéaire). La grandeur fondamentale est donc la fonction de corrélation spectrale des courants dans le milieu qui émet. Lorsque ce milieu est à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , cette fonction de corrélation est donnée par un théorème général de physique statistique appelé *théorème fluctuation-dissipation* [21]. Le résultat s'écrit sous la forme :

$$\langle j_k(\mathbf{r}, \omega) j_l(\mathbf{r}', \omega') \rangle = 4\pi \omega \epsilon_0 \epsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \delta_{kl} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (39)$$

où  $\delta_{kl}$  est le symbole de Kronecker, et  $\Theta(\omega, T)$  est l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique en équilibre à la température  $T$ .  $\epsilon''(\omega)$  est la partie imaginaire de la constante diélectrique, qui décrit l'absorption dans le milieu. On retrouve à ce stade que si le milieu est non absorbant ( $\epsilon'' = 0$ ), il n'émet pas de rayonnement thermique.

### 3. Lien entre le champ et les courants : fonction de Green

Une fois la fonction de corrélation des courants connue, il ne reste plus qu'à relier le champ rayonné aux courants pour calculer toutes les grandeurs utiles (densité d'énergie, flux échangés...). Les équations de Maxwell étant linéaires, la relation la plus générale est :

$$E_k(\mathbf{r}, \omega) = i\mu_o\omega \int_V G_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) j_l(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' , \quad (40)$$

où l'intégrale est étendue à tout le volume du corps et une sommation sur les indices répétés est implicite (notations d'Einstein). La grandeur  $G_{kl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  est un tenseur (le champ n'est en général pas colinéaire au courant) appelé *tenseur de Green* (ou simplement fonction de Green). Pour le calculer, il suffit de savoir calculer le rayonnement d'un élément de courant (ou d'un dipôle ponctuel) dans la géométrie considérée. Le problème de rayonnement thermique est ainsi ramené à un pur problème de rayonnement d'antenne classique. Cette méthode de calcul extrêmement puissante a été développée par Rytov dans les années 1950 [21]. Elle présente un intérêt majeur pour les transferts radiatifs aux courtes échelles de longueur car elle ne comporte aucune limitation propre au rayonnement : les problèmes d'interférences, de diffraction, de champ proche, de polarisation sont rigoureusement pris en compte par cette approche. La seule limitation est l'utilisation d'une constante diélectrique pour décrire le milieu (la matière est donc traitée de manière macroscopique).

Cette méthode peut être utilisée pour calculer l'émission thermique en champ proche de sources planes [22], ou pour calculer les transferts radiatifs entre corps à distance nanométrique [23]. On trouvera un exposé de la méthode avec des exemples par exemple dans la réf. [24]. Dans le cadre de cet ouvrage, l'utilisation de cette méthode pour décrire les transferts radiatifs dans les nanostructures sera présentée en détail dans le chapitre 6.

## Annexe A : Exemples de fonction de Phase

### Dépendance angulaire

La fonction de phase dépend de l'angle d'incidence et de l'angle de diffusion. Pour des particules ayant une certaine symétrie (des sphères par exemple), la fonction de phase ne dépend que de l'angle relatif entre les deux directions. En coordonnées sphériques, on a  $\mathbf{u}(\theta, \phi)$  et  $\mathbf{u}'(\theta', \phi')$ . Le cosinus de l'angle relatif  $\cos \Theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$  est donné par la relation suivante :

$$\cos \Theta = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\phi - \phi') \quad (41)$$

où  $\mu = \cos\theta$  et  $\mu' = \cos\theta'$ .

### Fonction de phase constante

La plus simple des fonctions de phase est celle qui est constante :  $p(\cos \Theta) = 1$ . La diffusion est isotrope, le facteur d'anisotropie  $g$  vaut exactement 0.

### Fonction de phase de Rayleigh

Si la particule est non absorbante, très petite devant la longueur d'onde de l'onde incidente (particule dite de Rayleigh), elle se comporte comme un dipôle électrique. Dans le cas où l'onde incidente est non polarisée, la fonction de phase est alors :

$$p(\cos \Theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta) \quad (42)$$

### Fonction de phase de Henyey-Greenstein

Un modèle très utilisé est celui de la fonction de phase de Henyey-Greenstein. Cette fonction ne dépend que des deux paramètres  $\cos \Theta$  et  $g$  :

$$p(\cos \Theta) = \frac{1 - g^2}{\sqrt{(1 + g^2 - 2g \cos \Theta)^3}} \quad (43)$$

En particulier, cette fonction de phase obéit à la normalisation définie par l'équation (8).

### Fonction de phase de Mie

La théorie de Mie consiste en la résolution exacte de la diffusion d'une onde plane électromagnétique par une particule sphérique, homogène et optiquement isotrope. Si l'on connaît l'indice de la particule ( $n_p$ ), l'indice du milieu hôte ( $n_h$ ), le rayon de la particule ( $r$ ), la longueur d'onde de l'onde incidente dans le milieu hôte ( $\lambda = \lambda_0/n_h$ ), alors la théorie de Mie nous fournit les sections efficaces d'extinction, de diffusion et d'absorption d'une particule, l'albédo ( $a$ ), la fonction de phase ( $p(\cos \Theta)$ ) et le paramètre d'anisotropie ( $g$ ), en fonction du paramètre de taille des particules ( $X = 2\pi r/\lambda$ ). Ces propriétés sont celles d'une particule. Si l'on suppose que la diffusion est indépendante et que l'on donne la concentration des particules dans le milieu, nous pouvons obtenir par de simples relations tous les paramètres de l'ETR (longueurs d'extinction, de diffusion, d'absorption et fonction de phase du milieu).

### Développement sur les polynômes de Legendre

Dans le cas général, la fonction de phase  $p_\nu(\cos \Theta)$  peut être développée sur la base des polynômes de Legendre :

$$p(\cos \Theta) = \sum_{n=0}^M a_n P_n(\cos \Theta) \quad (44)$$

Les  $a_n$  sont les coefficients de développement et  $P_n(\cos \Theta)$  sont les polynômes de Legendre de degré  $n$ . La série converge en un nombre fini de terme selon la précision voulue. Le nombre de termes sera déterminé par l'anisotropie de la fonction de phase. Plus elle est anisotrope, plus il faudra de termes dans le développement. Si l'on développe par exemple la fonction de phase de Henyey-Greenstein sur la base des polynômes de Legendre, on obtient la relation suivante :  $a_n = g^n$ .

- 
- [1] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover, New York, 1960).
  - [2] K.M. Case and P.F. Zweifel, *Linear Transport Theory* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967).
  - [3] L.A. Apresyan and Yu A. Kravtsov, *Radiation Transfer: Statistical and Wave Aspects* (Gordon and Breach, Amsterdam, 1996).
  - [4] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (IEEE Press, Piscataway, 1997).
  - [5] G.E. Thomas and K. Stamnes, *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999), Chap. 8.
  - [6] A. Mandelis, "Diffusion waves and their uses", *Phys. Today* **53**, 29–34 (2000).
  - [7] A. Majumdar, "Microscale heat conduction in dielectric thin films", *J. Heat Transfer* **115**, 7–16 (1993).
  - [8] G. Chen, "Size and interface effects on thermal conductivity of superlattices and periodic thin-film structures", *J. Heat Transfer* **119**, 220–229 (1997).
  - [9] R. Aronson and N. Corngold, "Photon diffusion coefficient in an absorbing medium", *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 1066–1071 (1999); R. Graaff and J.J. Ten Bosch, "Diffusion coefficient in photon diffusion theory", *Opt. Lett.* **25**, 43–45 (2000); R. Elaloufi, R. Carminati and J.-J. Greffet, "Definition of the diffusion coefficient in scattering and absorbing media", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 678–685 (2003).
  - [10] R.H.J. Kop, P. de Vries, R. Sprik and A. Lagendijk, "Observation of anomalous transport of strongly multiple scattered light in thin disordered slabs", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4369–4372 (1997).
  - [11] R. Elaloufi, R. Carminati and J.-J. Greffet, "Time-dependent transport through scattering media: From radiative transfer to diffusion", *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **4**, S103–S108 (2002).
  - [12] R. Elaloufi, "Propagation du rayonnement en milieu diffusant. Etude de la transition en régime balistique et régime diffusif et des fluctuations temporelles d'intensité" (Thèse, Ecole Centrale Paris, 2003).

- [13] R. Aronson, “Boundary conditions for diffusion of light”, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2532–2539 (1995).
- [14] A.D. Kim and A. Ishimaru, “Optical diffusion of continuous wave, pulsed and density waves in scattering media and comparisons with radiative transfer”, *Appl. Opt.* **37**, 5313–5319 (1998).
- [15] Z.Q. Zhang, I.P. Jones, H.P. Schriemer, J.H. Page, D.A. Waitz and P. Sheng, “Wave transport in random media: The ballistic to diffusive transition”, *Phys. Rev. E* **60**, 4843–4850 (1999).
- [16] K. Mitra and S. Kumar, “Development and comparison of models for light-pulse transport through scattering-absorbing media”, *Appl. Opt.* **38**, 188–196 (1999).
- [17] X. Zhang and Z.Q. Zhang, “Wave transport through thin slabs of random media with internal reflection: Ballistic to diffusive transition”, *Phys. Rev. E* **66**, 016612 (2002).
- [18] R. Elaloufi, R. Carminati and J.-J. Greffet, “Diffusive-to-ballistic transition in dynamic light transmission through thin scattering slabs: A radiative transfer approach”, *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 1430–1437 (2004).
- [19] J.X. Zhu, D.J. Pine and D.A. Weitz, “Internal reflection of diffusive light in random media”, *Phys. Rev. A* **44**, 3948–3959 (1991).
- [20] K.E. Goodson, M.I. Flik, L.T. Su and D.A. Antoniadis, “Prediction and measurement of the thermal conductivity of amorphous dielectric layers”, *J. Heat Transfer* **116**, 317–324 (1994).
- [21] S.M. Rytov, Yu. A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics*, Vol. 3 (Springer Verlag, Berlin,1989), chap. 3.
- [22] R. Carminati and J.-J. Greffet, “Near-field effects in spatial coherence of thermal sources”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1660 (1999).
- [23] J.P. Mulet, K. Joulain, R. Carminati and J.-J. Greffet, “Enhanced radiative heat transfer at nanometric distances”, *Microscale Thermophysical Eng.* **6**, 209–222 (2002).
- [24] J.-J. Greffet, R. Carminati, K. Joulain, J.-P. Mulet and C. Henkel, “Coherence properties of thermal near fields : implications for nanometer-scale radiative transfer”, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXLIV*, edited by M. Allegrini, N. García and O. Marti (IOS Press, Amsterdam, 2001), pp. 375–392.